UN CRITERIO DE ISOMORFISMOS PARA MÓDULOS INYECTIVOS SOBRE CLASES DE MONOMORFISMOS

J. E. Macías-Díaz[a], J. S. Macías-Medina[a],

[a]Departamento de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma de Aguascalientes, jemacias@correo.uaa.mx, sieg_macias@hotmail.com

RESUMEN:
Partiendo de una definición de la inyectividad de módulos con respecto a clases algebraicas adecuadas de monomorfismos, se establecerán las condiciones generales bajo las cuales dos módulos son isomorfos cuando cada uno es isomorfo a un submódulo del otro. El resultado principal de este trabajo generaliza tanto el criterio de Bumby para el isomorfismo de módulos inyectivos, como el teorema de Cantor-Bernstein-Schröder sobre la cardinalidad de conjuntos. La aplicabilidad del teorema principal abarca los casos de módulos inyectivos puros, y de módulos RD-inyectivos como escenarios particulares. Varios de los resultados tradicionales sobre módulos injectivos se generalizarán durante el desarrollo de este trabajo, incluídas las propiedades elementales de módulos injectivos y las propiedades de cápsulas injectivas.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo, consideramos un anillo R fijo con un elemento identidad 1, que satisface que 1 no es igual a 0. En este trabajo, la notación hom(A,B) representará al conjunto de todos los morfismos de un objeto A a un objeto B dentro de alguna categoría específica. Sin embargo, en esta introducción, los objetos y morfismos considerados serán todos pertenecientes a la categoría de R-módulos izquierdos.

La motivación y el punto de partida de este informe es el siguiente resultado, que es una extensión algebraica del famoso teorema de Cantor-Bernstein-Schröder sobre la cardinalidad de conjuntos.

TEOREMA. Dos módulos inyectivos son isomorfos si son isomorfos a submódulos del otro.

COROLARIO. Dos módulos que son isomorfos a submódulos del otro tienen cascos inyectivos isomorfos.

Un módulo es cuasi-inyectivo si es un submódulo totalmente invariable de cada módulo inyectivo. Alternativamente, el módulo M es cuasi-inyectivo si cada homomorfismo de cualquier submódulo N de M en M se extiende a un endomorfismo de módulos en M. Los módulos inyectivos son claramente cuasi-inyectivos, y cada módulo está contenido como un submódulo en un módulo cuasi-inyectivo mínimo (llamado su casco cuasi-inyectivo), el cual es único salvo isomorfismo canónico.

COROLARIO. Dos módulos que son isomorfos a submódulos del otro tienen cascos cuasi-inyectivos isomorfos.

En vista de estas observaciones, muchas preguntas surgen en la búsqueda de condiciones bajo las cuales dos módulos son isomorfos cuando son isomorfos a submódulos del otro. Por ejemplo,

¿existe un criterio general para el isomorfismo de módulos que extiende el teorema de Bumby y que contemple los casos de módulos RD-inyectivos e inyectivos puros como escenarios particulares? En el presente trabajo, se establecerá una respuesta afirmativa a esta pregunta, y derivaremos varios resultados que generalizan las propiedades compartidos por todas las condiciones de inyectividad de interés.

2. JUSTIFICACIÓN

La plausibilidad de generalizar el teorema de Bumby y el teorema de Cantor-Bernstein-Schroeder a categorías de módulos projectivos, está fundamentada en el hecho que las propiedades de injectividad de interés poseen propiedades categóricas comunes. Basados en estos hechos, el problema de extender estos teoremas a la categorías de módulos con propiedades inyectivas, es una tarea interesante desde el punto de vista matemático, más allá de las potenciales aplicaciones de los resultados que se obtengan.

3. RESULTADOS

Se demostró el siguiente teorema para ciertas clases algebraicas H de monomorfismos de módulos, que satisfacen las siguientes propiedades:

- H incluye a todos los isomorfismos.
- H es cerrado bajo composiciones.
- H es cerrado bajo sumas directas de morfismos H-esenciales.
- H contiene todos los sumandos directos.
- H es cerrado con respecto a uniones de cademas ascendentes numerables.
- Todo módulo posee una cáscara H-inyectiva.

TEOREMA. Sea H una clase algebraica de monomorfismos de módulos. Dos objetos H-injectivos son isomorfos cuando son H-equivalentes.

Como consecuencia, el teorema de Bumby es válido para módulos injectivos-puros (respectivamente, RD-injectivos) que son submódulos puros (respectivamente, relativamente divisibles) uno del otro.

4. CONCLUSIONES

Partiendo de una definición de la inyectividad de módulos con respecto a clases algebraicas adecuadas de monomorfismos, se establecieron condiciones generales bajo las cuales dos módulos son isomorfos cuando cada uno es isomorfo a un submódulo del otro. El resultado principal de este trabajo generaliza tanto el criterio de Bumby para el isomorfismo de módulos inyectivos, como el teorema de Cantor-Bernstein-Schröder sobre la cardinalidad de conjuntos. La aplicabilidad del teorema principal abarca los casos de módulos inyectivos puros, y de módulos RD-inyectivos como escenarios particulares. Varios de los resultados tradicionales sobre módulos injectivos se generalizarán durante el desarrollo de este trabajo, incluídas las propiedades elementales de módulos injectivos y las propiedades de cápsulas injectivas..

BIBLIOGRAFÍA

1. R. T. Bumby, “Modules which are isomorphic to submodules of each other”, Archiv der Math., Vol. 16, 1, 1965, pp. 184–185.