



ESTUDIO DE LA ENTROPÍA DE SHANNON DE LA DINÁMICA NO LINEAL DE DOS OSCILADORES DE DUFFING NO DISIPATIVOS ACOPLADOS

G. Arroyo Correa^a, J. Vega Cabrera^a, C. H. Mendoza Pérez^a

^aFacultad de Ciencias Físico-Matemática, UMSNH, Morelia, Mich., garroyo@umich.mx, vcabrea@umich.mx, carloschmp@yahoo.com

RESUMEN

En este trabajo se estudia numéricamente la dinámica no lineal de dos clases de osciladores del tipo Duffing sin término de amortiguamiento y perturbados armónicamente. Para la clase analizada se estudia la sincronización entre dos osciladores idénticos mediante el comportamiento de la entropía de Shannon, tanto del acoplamiento unidireccional como bidireccional, en función de la amplitud de la perturbación y del parámetro de acoplamiento. Los resultados numéricos muestran diferencias marcadas tanto en la forma de sincronización como en la naturaleza de los sistemas. Se investiga también la posibilidad de la sincronización entre sistemas no idénticos. Se agradece el apoyo del programa CIC-UMSNH 2015.

1. INTRODUCCIÓN

El ingeniero alemán Georg Duffing propuso en 1918 un modelo para explicar el comportamiento del pandeo de una viga al colocarse encima de ella un peso. Duffing encontró que este comportamiento podría ser modelado por una ecuación similar a la de una masa atada a un resorte no lineal. El modelo de Duffing está descrito por la ecuación:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - x + x^3 = \gamma \cos(\omega t), \quad (1)$$

en donde δ , γ y ω son parámetros que pueden ser variados. El punto y doble punto en la Ec. (1) denotan primera y segunda derivada con respecto al tiempo. Este modelo se ha usado en problemas relacionados con circuitos electrónicos no lineales y en oscilaciones de barras magnetoelásticas [1]. De la Ec. (1) se pueden considerar las siguientes dos variantes sin término de disipación ($\delta = 0$):

$$\ddot{x} - x + x^3 = \gamma \cos(t), \quad (2)$$

$$\ddot{y} + y^3 = \gamma \cos(t). \quad (3)$$

Con el cambio de variables $\dot{x} = u$, $\dot{y} = v$, las Ecs. (2) y (3) se transforman en:

$$\dot{x} = u \quad (4)$$

$$\dot{u} = \gamma \cos(t) + x - x^3$$

$$\dot{y} = v \quad (5)$$

$$\dot{v} = \gamma \cos(t) - y^3$$

Shannon en su trabajo clásico acerca de la teoría de la comunicación [2], estableció resultados generales tanto para la información transmitida en sistemas discretos como continuos. En este



esquema planteado por Shannon resulta interesante rescatar el concepto de entropía asociada con una señal. La idea básica de este concepto se puede describir en los siguientes términos. Supóngase que se tiene un conjunto de puntos definidos en un plano. Se define una malla (cuadrícula) la cual se divide en N celdas rectangulares idénticas. El número de puntos contenidos en una celda dividido entre el número total de puntos del mapa da la probabilidad de ocupación p_i de la i -ésima celda. La entropía de Shannon E_s se define como:

$$E_s = -\sum_{i=1}^N p_i \ln(p_i), \quad (6)$$

en donde \ln denota el logaritmo natural. En un trabajo previo aplicamos la Ec. (6) para estudiar experimentalmente el comportamiento de la entropía de Shannon en un sistema mecánico caótico [3].

2. TEORÍA

En este trabajo se presenta un estudio numérico de la dinámica no lineal del sistema dinámico definido cuando se acoplan los sistemas descritos por las Ecs. (4) y (5), tanto en acoplamiento unidireccional como bidireccional, usando un enfoque entrópico. El sistema analizado está descrito por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u + k_1(y - x) \\ \dot{u} &= \gamma \cos(t) + x - x^3 \\ \dot{y} &= v + k_2(x - y) \\ \dot{v} &= \gamma \cos(t) - y^3 \end{aligned} \quad (7)$$

Cuando $k_1=k_2$ se tiene acoplamiento bidireccional, en tanto que $k_2=0$ define acoplamiento unidireccional.

Se calcula numéricamente la entropía de Shannon del sistema (7) como función de la amplitud de la perturbación γ y del parámetro de acoplamiento $k_{1,2}$. La entropía se calcula de acuerdo a la Ec. (6) sobre el espacio de la señal de sincronización XY .

3. RESULTADOS

La Fig. 1 muestra el estado dinámico por separado de los osciladores descritos por las Ecs. (4)-(5) para los diferentes valores de la amplitud de perturbación γ analizadas en este trabajo. La Fig. 2 muestra el estado de la señal de la sincronización (plano XY) del sistema (7) cuando no existe sincronización ($k_1=k_2=0$) para los distintos valores de γ mostrados en la Fig. 1. De estas figuras es evidente la caoticidad a medida que γ aumenta. En este trabajo estaremos interesados en acoplamiento de estdos caóticos en ambos osciladores. Las Figs. 3-4 presentan el comportamiento de la entropía de Shannon del sistema (7) como función del parámetro de acoplamiento, tanto en modo bidireccional como unidireccional. De estas figuras es evidente que hay un amplio rango de valores del factor de acoplamiento en el cual se alcanza una buena sincronización de los dos osciladores. En ambas figuras se puede notar que el acoplamiento bidireccional favorece más rápidamente la sincronización de los osciladores.

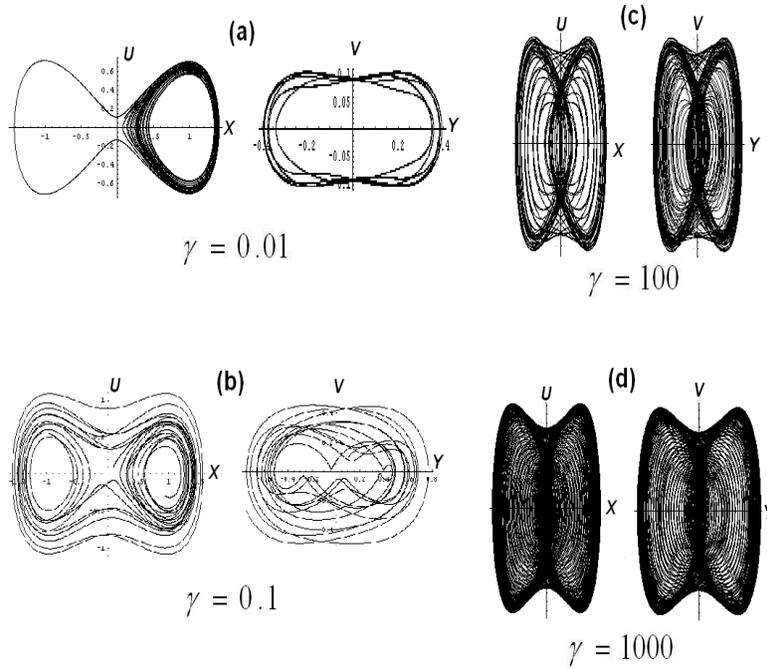


Figura 1. Estados dinámicos individuales de los osciladores (4) y (5).

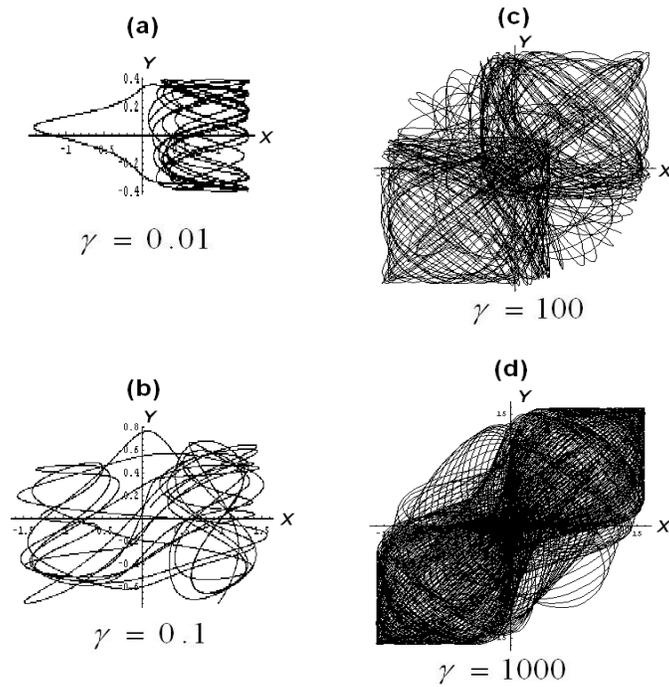


Figura 2. Señal de sincronización del sistema (7) cuando no hay acoplamiento ($k_1=k_2=0$).

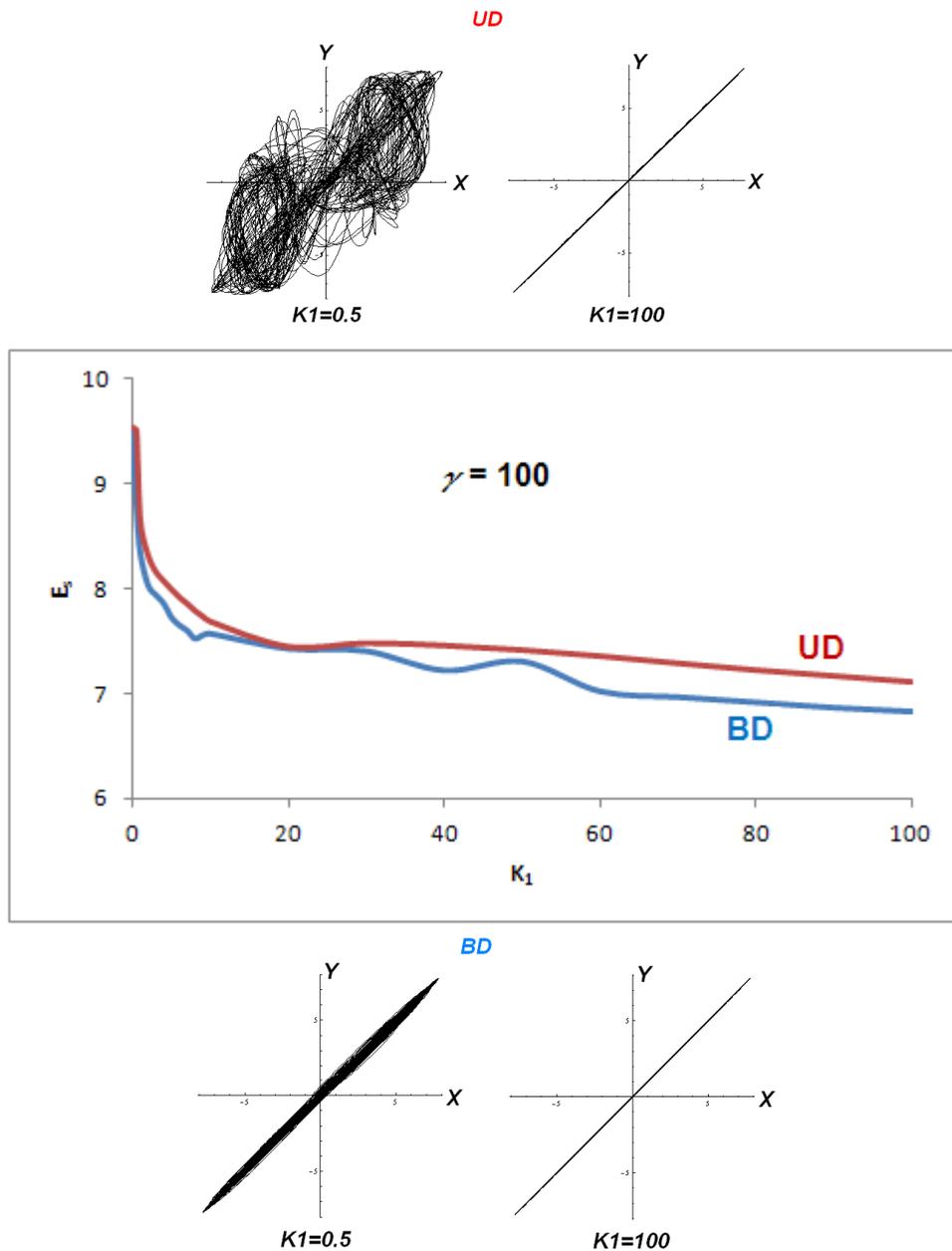


Figura 3. Comportamiento de la entropía de Shannon E_s , gráfico intermedio, tanto en modo bidireccional (**BD**) como unidireccional (**UD**). El par de gráficos superior e inferior dan una idea del comportamiento de la señal de sincronización al inicio y al final del rango de valores de K_1 . En esta figura $\gamma = 100$.

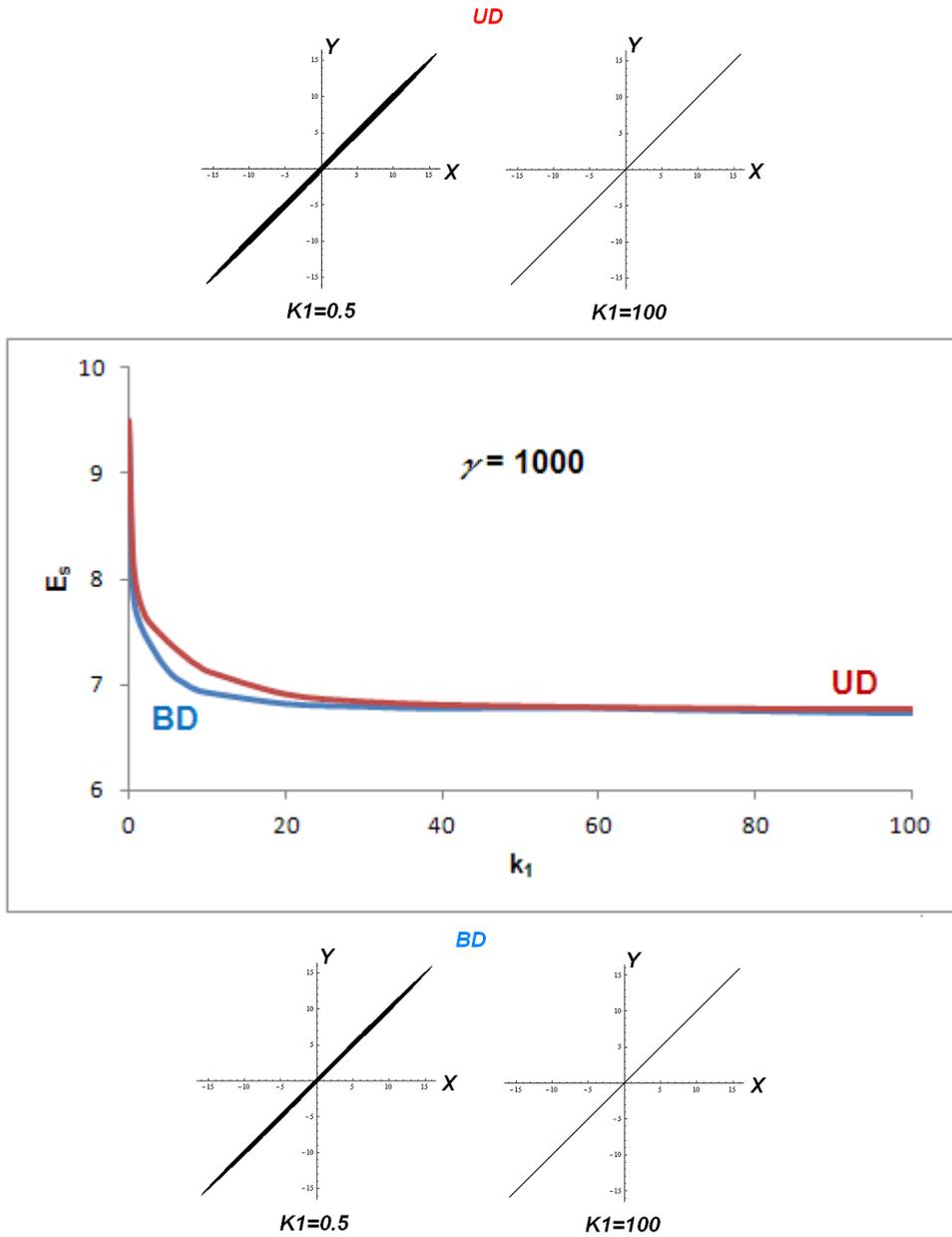


Figura 4. Misma disposición que en la Fig. 3 para el caso $\gamma = 1000$.



4. CONCLUSIONES

Los resultados muestran que es posible alcanzar una sincronización de los dos osciladores de Duffing no disipativos descritos por el sistema (7), tanto en modo bidireccional como unidireccional. La sincronización es favorecida para valores grandes de la amplitud de perturbación γ . Estos resultados pueden ser de interés en el diseño de sistemas de encriptación de información.

BIBLIOGRAFÍA

1. J. C. Sprott, "*Elegant Chaos: Algebraically Simple Chaotic Flows*" (World Scientific, Singapore, 2010), Chapter 2, pp.
2. C. E. Shannon, "A mathematical theory of communication", *The Bell System Technical Journal*, Vol. 27, 1948, pp. 379-423, 623-656.
3. G. Arroyo Correa et al., "Estudio experimental de la entropía de Shannon en un sistema mecánico caótico", *Memorias del IX encuentro Participación de la Mujer en la Ciencia*, 2012, trabajo S4-FMCT10.