



## ESTRUCTURAS DE BANDAS DE CRISTALES FOTÓNICOS EN 2D CON SUPERFICIES RUGOSAS QUE CONTIENEN METAMATERIAL DISPERSIVO

Luis Eduardo Puente Díaz<sup>a</sup>, Héctor Pérez Aguilar<sup>a</sup>, Alberto Mendoza Suárez<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas “Mat. Luis Manuel Rivera Gutiérrez”, UMSNH, Morelia, Mich., [fmatpuente@gmail.com](mailto:fmatpuente@gmail.com), [hiperezag@yahoo.com](mailto:hiperezag@yahoo.com), [amendozas777@yahoo.com.mx](mailto:amendozas777@yahoo.com.mx)

### RESUMEN:

Los cristales fotónicos (CFs), actualmente son un tema de investigación novedoso debido a que presentan un alto potencial para muchas aplicaciones, tales como el desarrollo de los circuitos fotónicos integrados. Los CFs están compuestos de estructuras dieléctricas periódicas que afectan a la propagación de las ondas electromagnéticas (EM) del mismo modo que el potencial periódico en un semiconductor afecta el movimiento de los electrones, definiendo análogamente bandas fotónicas permitidas y prohibidas. En este trabajo presentamos un método integral que permite calcular estructuras de bandas en cristales fotónicos bidimensionales con superficies rugosas que contienen metamaterial dispersivo en una celda unitaria, basado en la solución numérica de la ecuación de Helmholtz mediante el uso de ecuaciones integrales. La influencia de la rugosidad en la superficie es muy notoria en la estructura de bandas, lo cual indica cambios considerables en las propiedades de transmisión en un cristal fotónico real. Esta idea de modelar superficies rugosas es relevante, ya que a pesar de la existencia de una tecnología bien desarrollada para la fabricación de superficies se tienen cristales fotónicos con defectos.

### 1. INTRODUCCIÓN

En el campo de las telecomunicaciones, los conductores de cobre han sido substituidos por fibras ópticas para la transmisión de señales. Sin embargo, la velocidad de envío de la señal vía Internet es lenta se debe en gran parte a que al ingresar la señal óptica en los dispositivos de proceso electrónicos, ésta debe convertirse en señal eléctrica. Por esta razón se busca una nueva alternativa de desarrollo en la tecnología de telecomunicaciones que sea puramente fotónica. Aquí es donde el estudio de circuitos fotónicos y particularmente de **Cristales Fotónicos** (CFs) se hace necesario. Los CFs son sistemas que aveces involucran simetrías complicadas y propiedades físicas muy novedosas, como las correspondientes a los metamateriales. Estos materiales artificiales, conocidos también como materiales izquierdos (LHMs), han atraído un gran interés de investigación entre los investigadores de diferentes campos. Este entusiasmo se puede atribuir principalmente a sus características electromagnéticas únicas, debido al hecho de que los vectores de la luz ( $\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{k}$ ) forman una triada con la mano izquierda para una onda que se propaga a través de estos medios [1]. Aunque los experimentos fundamentales con metamateriales se han desarrollado para la región de microondas del espectro electromagnético, existen resultados recientes que indican que los LHMs están ahora disponibles en las regiones visible e infrarroja [2]. Puesto que estos materiales tienen un índice de refracción negativo dentro de un rango dado del espectro electromagnético, algunos de los fenómenos ópticos bien conocidos presentan variaciones que los hacen potencialmente útiles para nuevas aplicaciones tecnológicas, como por ejemplo la refracción negativa, la invisibilidad y la transmisión de información [3,4]. Como consecuencia, la comunidad científica ha comenzado a estudiar una variedad de sistemas ópticos que incluyen LHMs como componentes principales.

El estudio de la propagación de la luz en CFs se basa en métodos numéricos, algunos de los cuales se aplicaron primero en física del estado sólido para el estudio de estructuras de bandas electrónicas. El más citado puede ser el método de ondas planas [5] que permite calcular las estructuras de bandas fotónicas que implican materiales sin dispersión y absorción. Otra de las desventajas de este método es cuando los bordes afilados están presentes en las inclusiones de la



celda unitaria y la expansión de la función dieléctrica, en términos de una serie de Fourier truncada, presenta problemas de convergencia aumentando los requisitos de memoria. Además de un alto contraste entre las propiedades de los materiales que componen, también el método produce cierta inestabilidad en las soluciones. Bajo este contexto, el método integral que estamos considerando en este trabajo [6], presenta algunas ventajas en comparación con el método de ondas planas y otros métodos, ya que tiene la capacidad de estudiar diferentes aspectos de estos sistemas que tienen geometrías complicadas y propiedades físicas muy novedosas, como las correspondientes a los metamateriales. Como veremos, el formalismo propuesto ha sido considerado como una alternativa a los métodos existentes en el sentido de que da buenos resultados a diferencia de otros donde suelen fallar.

Este trabajo está desarrollado de la siguiente manera. En la sección 2 se presenta el sistema a estudiar y un método numérico riguroso para resolver el problema planteado. En la sección 3 se muestran resultados numéricos preliminares del cálculo de estructuras de bandas en cristales fotónicos bidimensionales con superficies rugosas que contienen metamaterial dispersivo en la inclusión cilíndrica de una celda unitaria cuadrada. Finalmente, en la sección 4 se dan las conclusiones de este trabajo.

## 2. TEORÍA

El interés de este trabajo es poder obtener las estructuras de bandas de un cristal fotónico en 2D (CF2D) con superficies rugosas que contienen metamaterial dispersivo (LHM) y dieléctrico (LR2DPC) en una celda unitaria mediante la aplicación de un método numérico basado en la segunda identidad de Green para resolver la ecuación de Helmholtz. La celda unitaria está compuesta de dos materiales, vacío ( $\epsilon_1$ ) y LHM ( $\epsilon_2(\omega)$ ) como se muestra en la Fig.1.

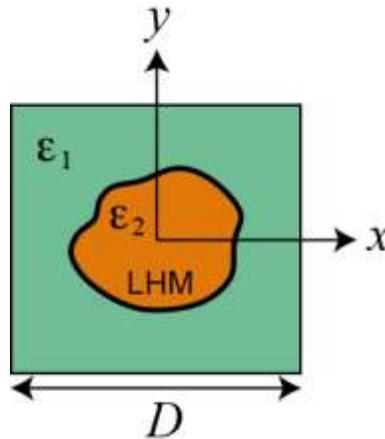


Figura 1. Diagrama de un cristal fotónico bidimensional infinito. La celda unitaria cuadrada de longitud  $D$  está compuesta de dos materiales diferentes con constantes dieléctricas  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2(\omega)$ .

Las propiedades ópticas están dadas por la función dieléctrica [7,8]

$$\epsilon_p(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (1)$$

y la permeabilidad magnética



$$\mu_p(\omega) = 1 - \frac{F \omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (2)$$

Estas funciones son mostradas en Fig. 2 con los parámetros  $\omega_p = 10c/D$ ,  $\omega_0 = 4c/D$  y  $F = 0.56$  [7,8]. La región donde este LHM presenta un índice de refracción negativo está dentro del rango de frecuencia  $\omega_0 < \omega < \omega_{LM}$  con  $\omega_{LM} = \omega_0/\sqrt{1-F}$ . En la Fig. 2 y en las siguientes usaremos las unidades reducidas de frecuencia dada por  $\omega_r = \omega D/2\pi c$  y el vector de onda de Bloch  $k_r = kD/2\pi$ , donde  $c$  representa la velocidad de la luz y  $D$  es una constante de normalización que elegimos para ser la dimensión del lado de una celda unitaria cuadrada. En unidades reducidas el plasma y las frecuencias de resonancia son  $\omega_p = 1.592$  y  $\omega_0 = 0.637$ , respectivamente. La técnica numérica que se describe brevemente se le conoce como el Método de la Ecuación Integral que ha sido desarrollado por Mendoza y sus colaboradores [6,8].

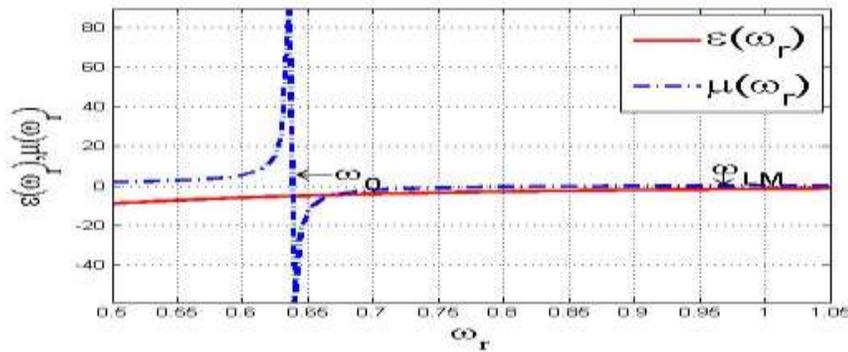


Figura 2. Función dieléctrica  $\epsilon_r$  y permeabilidad magnética  $\mu_r$  de un material dispersivo (LHM) como una función de la frecuencia reducida.

## 2.1 Método de la Ecuación Integral

Como sabemos, si asumimos una dependencia armónica del tiempo  $e^{-i\omega t}$  para los campos electromagnéticos, la ecuación de onda es transformada en la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 \Psi_j(\mathbf{r}) + k_j^2 \Psi_j(\mathbf{r}) = 0 \quad (3)$$

En la Ec. (3),  $\Psi_j(\mathbf{r})$  representa el campo eléctrico  $E_z$  en el caso de la polarización  $TE$ , y el campo magnético  $H_z$  en el caso de la polarización  $TM$ , ambas en el  $j$ -ésimo medio (Fig. 1). Se considera que el campo electromagnético  $\Psi_j(\mathbf{r})$  satisface las condiciones de frontera para cada polarización y las condiciones de periodicidad debido a la presencia del CF2D por medio del teorema de Bloch. La magnitud del vector de onda está dado por:

$$k_j = n_j(\omega) \frac{\omega}{c} \quad (4)$$



donde el índice de refracción  $n_j(\omega) = \pm \sqrt{\mu_j(\omega)\epsilon_j(\omega)}$  que involucra las propiedades de los materiales esta dado en términos de la permeabilidad magnética  $\mu_j(\omega)$  y la permitividad eléctrica  $\epsilon_j(\omega)$ , ambas funciones dependiendo de la frecuencia  $\omega$ . La velocidad de la luz está indicada por  $c$ . El signo que aparece en la ecuación del índice de refracción debe ser tomado como negativo cuando se considere un LHM y positivo cuando el medio sea un material dieléctrico.

Ahora introducimos una función de Green  $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ , la cual es una solución de la ecuación

$$\nabla^2 G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k_j^2 G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (5)$$

donde  $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = i\pi H_0^{(1)}(k_j |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$  siendo  $H_0^{(1)}(\zeta)$  la función de Hankel de primera clase y de orden cero. Aplicando la segunda identidad del teorema integral de Green a las funciones  $E_z^j(\mathbf{r})$  y  $G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$  para cada región correspondiente al  $j$ -ésimo medio, obtenemos

$$4\pi \int_{S_j} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') E_z^j(\mathbf{r}') dA' = \oint_{C_j} \left[ G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial E_z^j(\mathbf{r}')}{\partial n_j'} - \frac{\partial G_j(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n_j'} E_z^j(\mathbf{r}') \right] ds', \quad (6)$$

donde la superficie  $S_j$  está limitada por el correspondiente contorno cerrado  $C_j$  y  $\partial/\partial n_j$  es la derivada a lo largo de la normal al contorno  $C_j$ . Las funciones fuente  $E_z^j(\mathbf{r})$  y  $\partial E_z^j(\mathbf{r})/\partial n_j$  que representan los valores del campo eléctrico y su derivada normal evaluadas sobre el contorno  $C_j$  pueden ser obtenidas a partir de la Ec. (6). Para esto, se hace una aproximación del punto de observación sobre los contornos que delimitan cada una de las regiones llegando a un sistema de ecuaciones integrales acopladas (ver Ref. [6]). El sistema de ecuaciones integrales obtenido puede ser resuelto numéricamente por medio de una discretización sobre cada uno de los contornos, que bajo las condiciones de frontera sobre los perfiles y por la condición de periodicidad dada por la simetría de translación del CF2D, se llega a un sistema de ecuaciones algebraico. Como el sistema de ecuaciones determinado por la matriz  $M$  es homogéneo, se tiene que su determinante es cero. Así, cuando la función real está definida como

$$D(k, \omega) = \ln \left[ \det(M) \right], \quad (7)$$

sus puntos mínimos locales darán la relación de dispersión  $\omega = \omega(k)$  que determina la estructura de bandas. Para más detalle del método integral para sistemas periódicos se puede consultar las Refs. [6,8].

### 3. RESULTADOS

Como un ejemplo de aplicación consideramos el sistema propuesto de una celda unitaria de un CF2D que tiene un metamaterial con inclusión cilíndrica con una fracción de llenado  $f = 0.189$ , constante dieléctrica  $\epsilon_1 = 1$  y constante de permeabilidad magnética  $\mu_1 = 1$  para el vacío y para el metamaterial los valores dados de las ecuaciones (1) y (2) con los parámetros  $\omega_p = 1.592$ ,  $\omega_0 = 0.637$  y  $F = 0.0189$ . Este sistema ya fue previamente analizado por Mendoza-Suárez y colaboradores [8,9]. En las Figs. 3(a) y 4(a) se muestra una celda unitaria cuadrada de un CF2D que tiene un metamaterial con inclusión cilíndrica con un contorno suave y en la Figs. 3(b) y 4(b) se presenta la estructura de bandas en términos de la frecuencia reducida  $\omega_r = \omega^D/(2\pi c)$  y el vector



de Bloch reducido  $k_r = kD/(2\pi)$  en la primera zona de Brillouin en el espacio  $k$ . En este caso el parámetro de red fue considerado como  $D = 1$ .

A pesar de la existencia de una tecnología bien desarrollada se tienen defectos en la fabricación de superficies para los cristales fotónicos. Por esta razón, estamos interesados en estudiar la influencia de la rugosidad en las paredes de un CF2D real. Como en este trabajo sólo se está presentando el análisis de un CF2D infinito queda como trabajo futuro el caso de un cristal truncado, lo cual permitirá ver los cambios considerables en las propiedades de transmisión. Para estudiar los efectos de la rugosidad, consideramos un perfil de superficie aleatorio sobre la inclusión cilíndrica de la celda unitaria. Este perfil está definido por una realización de un proceso aleatorio de correlación Gaussiana que obedece una función de densidad de probabilidad exponencial negativa. En las Figs. 3(c) y 4(c) se muestra el perfil que tiene una rugosidad aleatoria con una longitud de correlación  $\alpha = 0.0526$  y una desviación estándar de las alturas  $\delta = 0.0126$  para distintos puntos de muestreo. Tomando en cuenta los mismos parámetros que en el caso de un perfil suave, se presenta en las Figs. 3(d) y 4(d) las estructuras de bandas correspondientes. Para este ejemplo se consideró una rugosidad notable para que se apreciaran los cambios en la estructura de las bandas.

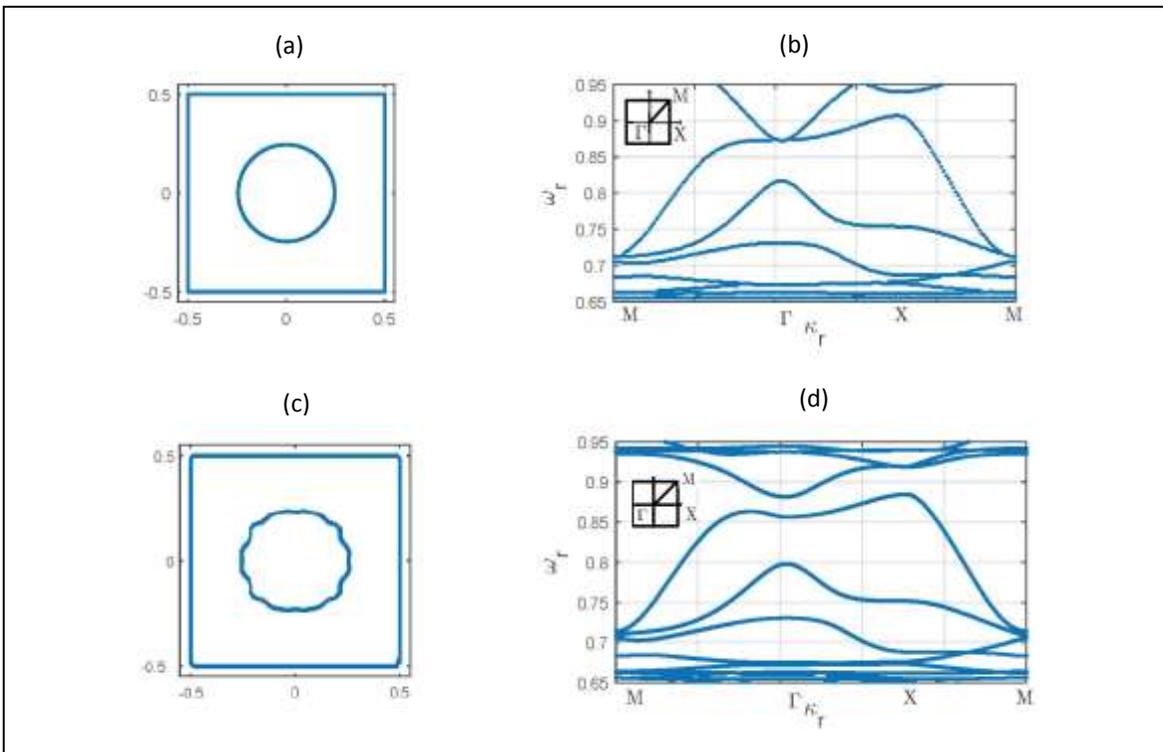


Figura 3. Celda unitaria cuadrada de un CF2D que está compuesta de dos materiales, vacío y metamaterial en la inclusión cilíndrica con un contorno (a) sólido y (c) rugoso. Estructura de bandas bajo polarización TM para un CF2D con barras de sección cuadrada para un contorno (b) sólido y (d) rugoso. El recuadro de la izquierda muestra la primera zona de Brillouin en el espacio  $k$ .



En la Figs. 3(d) y 4(d) se tienen cambios considerables en la bandas debido al efecto de la rugosidad en la superficie de la inclusión de la celda.

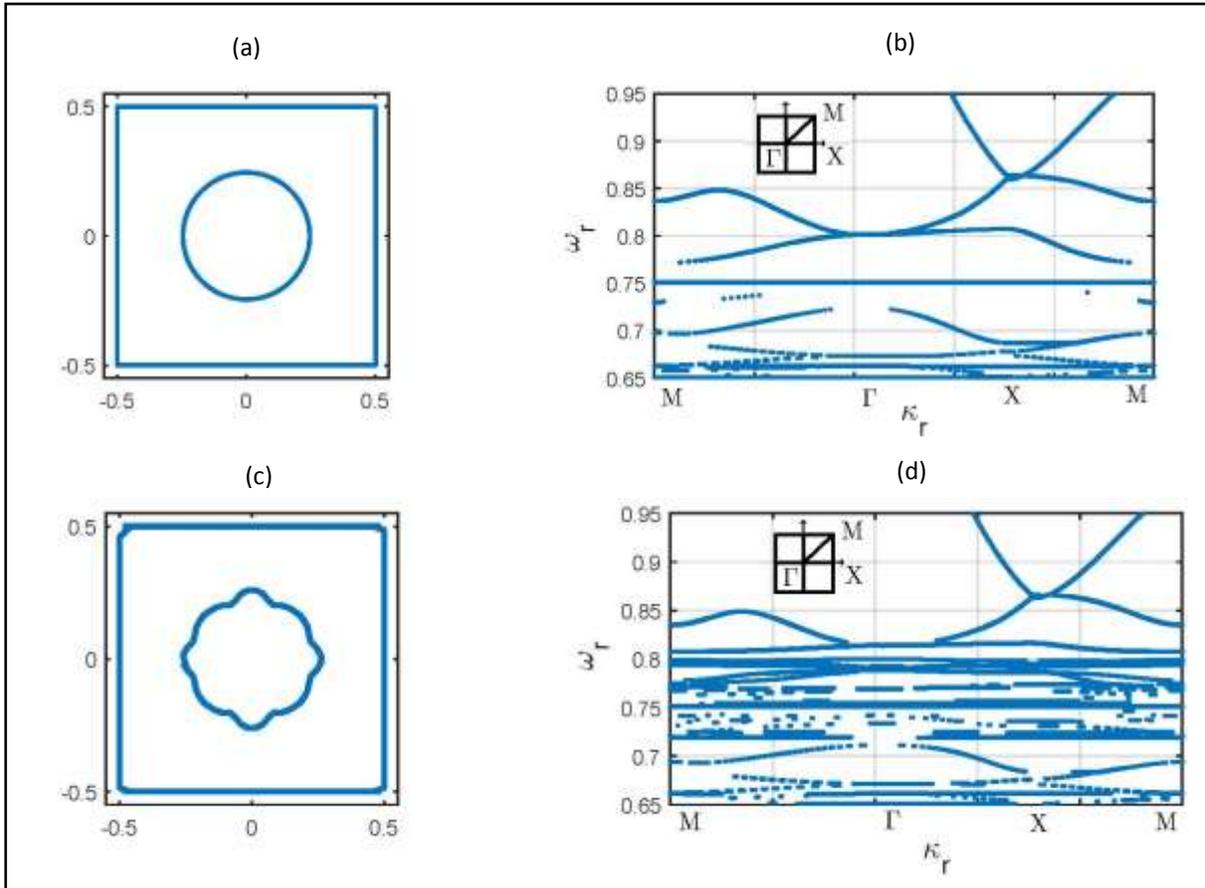


Figura 4. Celda unitaria cuadrada de un CF2D que está compuesta de dos materiales, vacío y metamaterial en la inclusión cilíndrica con un contorno (a) sólido y (c) rugoso. Estructura de bandas bajo polarización TE para un CF2D con barras de sección cuadrada para un contorno (b) sólido y (d) rugoso. El recuadro de la izquierda muestra la primera zona de brillouin en el espacio  $k$ .

#### 4. CONCLUSIONES

Hemos aplicado un método numérico para calcular la estructura de bandas de un cristal fotónico bidimensional con superficies rugosas que contiene un metamaterial dispersivo en una inclusión cilíndrica. Este método de la Ecuación Integral tiene una gran ventaja en comparación de los demás métodos; la cual es sólo tener en cuenta un número finito de puntos de muestreo a lo largo de los contornos de la celda unitaria, permitiendo una menor cantidad de recursos computacionales. Además, el método integral permite estudiar diferentes aspectos de estos



sistemas que tienen geometrías complicadas; en particular, la rugosidad en la superficie de los cristales fotónicos. Los efectos de la rugosidad aleatoria sobre la pared de la inclusión cilíndrica que contiene un metamaterial dispersivo modifica considerablemente la estructura de bandas, lo cual es importante tomar en cuenta en la fabricación de los cristales fotónicos.

## REFERENCIAS

1. V. G. Veselago, "The Electrodynamics of Substances with Simultaneously Negative Values of  $\epsilon$  and  $\mu$ ," *Sov. Phys. Usp.* Vol. 10, 509-514 (1968).
2. H. J. Lezec, J. A. Dionne, and H. A. Atwater, "Negative refraction at visible frequencies," *Science* Vol. 316, 430-432 (2007).
3. N. Engheta, and R. W. Ziolkowski, "A positive future for double-negative metamaterials," *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.* Vol. 53, 1535-1556 (2005).
4. N., Engheta, "Circuits with light at nanoscales: optical nanocircuits inspired by metamaterials," *Science* Vol. 317, 1698-1702 (2007).
5. R. Archuleta-García, M. B. Manzanares-Martínez y J. Manzanares-Martínez, "Una descripción del método de ondas planas para el cálculo de bandas fotónicas," *Rev. Boliviana de Fis.* Vol. 13, 79-85 (2007).
6. A. Mendoza-Suárez, F. Villa-Villa, and J. A. Gaspar-Armenta, "Numerical method based on the solution of integral equations for the calculation of the band structure and reflectance of one- and two- dimensional photonic crystals," *J. Opt. Soc. Am. B*, Vol. 23, 2249-2256 (2006).
7. D. Bria, B. Djafari-Rouhani, A. Akjouj, L. Dobrzynski, J. P. Vigneron, E. H. El Boudoti, and A. Nougouei, "Band structure and omnidirectional photonic band gap in lamellar structures with left-handed materials," *Phys. Rev. E* Vol. 69, 066613 (2004).
8. F. Villa-Villa, J. A. Gaspar-Armenta, and A. Mendoza-Suárez, "Surface modes in one dimensional photonic crystals that include left handed materials," *J. Electromagn. Waves Appl.* Vol. 21, 485-489 (2007).
9. A. Mendoza-Suárez, F. Villa-Villa, J. A. Gaspar-Armenta, "Band structure of two-dimensional photonic crystals that include dispersive left-handed materials and dielectrics in the unit cell" *J. Opt. Soc. Am. B* Vol. 24, 3091-3098 (2007).
10. L. Wu, S. He, and L. Chen, "On unusual narrow transmission bands for a multi-layered periodic structure containing left handed materials," *Opt. Express* Vol. 11, 1283-1290 (2003).
11. R. Ruppín, "Surface polaritons of a left-handed medium," *Phys. Lett. A* Vol. 227, 61-64 (2000).