



EL CAMPO CENTRAL: UNA SOLUCIÓN APROXIMADA.

R. Espíndola-Heredia^a A. Gutiérrez R.^a, G. Del Valle^a, G. Hernández^a, y Luis Alberto Peralta^b

^a Departamento de Ciencias Básicas, Área de Física Atómica y Molecular, Universidad Autónoma Metropolitana, Azcapotzalco, Laboratorio de Investigación en Dinámica Rotacional Edificio G-103, Av. San Pablo 180, Azcapotzalco., México D. F., roeshe@correo.azc.uam.mx, gabrieladel_valle@hotmail.com, gpe@correo.azc.uam.mx, ariadna_gtz_rosales@hotmail.com

^b Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, 6lapm6@gmail.com

RESUMEN

Resolvemos el problema del Campo Central (CC) para dos partículas de masa distinta, las cuales se encuentran separadas una distancia r . Se presentan las deducciones de las ecuaciones hasta obtener la ecuación de movimiento y posteriormente se resuelve ésta última por medio del método numérico Runge-Kutta de orden 4 (RK4), para obtener las trayectorias en el espacio fase. Generalizamos el análisis para cambiar la masa de las partículas. Y finalmente presentamos las ideas a desarrollar para obtener una interface gráfica que nos permita visualizar el comportamiento de las partículas.

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de fuerzas centrales surgen de manera recurrente en la física, ya sea cuando se analiza el movimiento de un cuerpo dentro de un potencial central, como los casos gravitatorio y electromagnético, o cuando se reduce el problema de dos cuerpos a un problema de un solo cuerpo. Una fuerza de tipo central se deriva de una función potencial con simetría esférica, esto es: $U = U(r)$. En este trabajo consideramos el sistema formado por 2 partículas que interactúan a través de una fuerza cuya acción pasa por las masas y su magnitud depende sólo de la distancia de separación entre ellas, problema que se reduce al problema de una sola partícula "efectiva", que se encuentra sometida a la acción de una fuerza central, a una distancia r del origen de coordenadas.

El movimiento de una partícula en un CC tiene como constantes de movimiento: la energía mecánica total E y el momento angular L . Dado que el movimiento ocurre en 2 dimensiones, ya que está confinado a un plano, las ecuaciones de movimiento son totalmente integrables. No obstante en este trabajo resolvemos las ecuaciones de movimiento aproximándolas por el método numérico RK4, ya que esto será de ayuda para visualizar el problema del CC en una interfaz gráfica que se está elaborando.

El trabajo se ha organizado de la siguiente forma: en la sección 2, presentamos la teoría del CC en las formulaciones Newtoniana y Lagrangiana, a partir de ésta última se presenta la ecuación diferencial que resolvemos por el método numérico, también se presenta la teoría de la integración numérica utilizada, en la sección 3 presentamos los resultados obtenidos, así como lo relacionado a la interfaz gráfica que se ha trabajado para visualizar el movimiento de las partículas, en la sección 4 presentamos las conclusiones de este trabajo.

2. TEORÍA

Consideremos dos partículas con masas m_1 y m_2 ubicadas en posiciones \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , respectivamente, con respecto a un origen O en un sistema de referencia inercial arbitrario. Supongamos que las



partículas interaccionan mediante un potencial que depende solamente de sus posiciones relativas, $U(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = U(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$. Este sistema se conoce como el problema de dos cuerpos (ver figura 1).

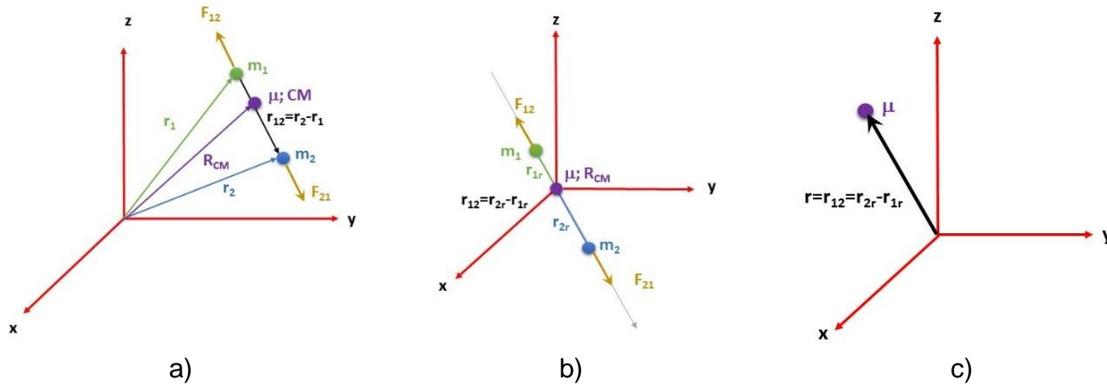


Figura 1: a) diagrama de las dos partículas en un sistema de referencia inercial arbitrario, b) diagrama del sistema en el sistema relativo al centro de masa, es decir el origen del sistema arbitrario es trasladado a la ubicación del centro de masa, c) sistema de masa reducida rotando alrededor del origen que se encuentra en el centro de masa.

El sistema posee 6 grados de libertad, los cuales corresponden a las 3 coordenadas espaciales del vector de posición \mathbf{r}_1 de la partícula 1 y a las tres coordenadas del vector de posición \mathbf{r}_2 de la partícula 2. Usualmente se define el vector de posición relativa de la partícula 2 con respecto a la partícula 1, como: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. Es posible obtener entonces el vector de posición del Centro de Masa (CM) del sistema dado, recurriendo a su definición, donde las posiciones relativas al CM de las partículas están dadas en términos de la posición de cada partícula y de la posición del CM.

Entonces es posible escribir la relación existente entre los vectores de posición y el vector de posición relativo:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \frac{-m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} + \mathbf{R}_{CM} \\ \mathbf{r}_2 &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} + \mathbf{R}_{CM} \end{aligned} \quad (1)$$

Los seis grados de libertad del sistema se describen mediante las componentes de los vectores \mathbf{r} y \mathbf{R}_{CM} . Las componentes cartesianas de \mathbf{R}_{CM} son coordenadas cíclicas, esto es: $(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}}_{CM} = Cte$.

Por lo tanto, el momento lineal total del sistema \mathbf{P} se conserva, debido a que no hay fuerzas externas presentes. El CM se mantiene en reposo o se mueve con velocidad constante. La conservación del momento lineal total se asocia a la simetría traslacional del sistema de dos cuerpos. Tenemos entonces tres cantidades que se conservan, las cuales corresponden a las componentes del momento lineal total. Otra propiedad importante para las fuerzas centrales, es que éstas no ejercen torca neta sobre las partículas, es decir: $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, lo que implica que el momento angular L_z se conserve (hemos seleccionado arbitrariamente el eje z como el eje de dirección del momento angular L) esto es:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{dL_z}{dt} = \mathbf{0} \quad (2)$$



Entonces, tanto la dirección como la magnitud de L_z son constantes, lo que proporciona una cuarta y una quinta cantidad que se conservan. Dado que L_z se conserva y es perpendicular al plano formado por (\mathbf{r}, \mathbf{p}) , produce que el movimiento siempre ocurra sobre ese plano. Entonces el movimiento de la partícula de masa reducida $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ se encuentra confinado al plano formado por (\mathbf{r}, \mathbf{p}) , por lo tanto, las coordenadas polares son óptimas para describir su movimiento. El plano del movimiento es el plano (x, y) , y las coordenadas generalizadas sobre el plano del movimiento deben ser (r, θ) por lo que la transformación de coordenadas cartesianas a polares indica que:

$$\dot{\mathbf{r}}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2 \quad (3)$$

con ello podemos escribir la ecuación para la Energía Mecánica total y para el Lagrangiano del sistema.

A. FORMULACIÓN NEWTONIANA

La energía mecánica del sistema es la suma de la energía cinética total del sistema y la energía potencial. Sin embargo, la energía cinética es la suma de la energía cinética del CM y la energía cinética relativa al CM. Pero el término de la energía del CM representa sólo un término constante, puesto que tanto su velocidad, como la masa total del sistema permanecen constantes, por lo tanto, sólo se considera la energía cinética relativa de las 2 partículas, dada por:

$$E = \frac{1}{2} \mu (r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{r}^2) - \frac{\mu(m_1+m_2)}{r} \quad (4)$$

La energía potencial de un campo de fuerzas centrales es definida como $U(\mathbf{r})$, donde \mathbf{r} es la magnitud del vector de posición al centro de fuerzas. Para el caso de un campo gravitacional uniforme la aceleración es siempre constante. Entonces supondremos el campo gravitacional en la dirección del vector \mathbf{r} .

B. FORMULACIÓN LAGRANGIANA

El Lagrangiano del sistema se puede expresar como: $L=T-U$ que quedaría con una diferencia en el signo correspondiente de la energía potencial de la expresión (4) y al aplicar la ecuación de Euler-Lagrange nos permite obtener las ecuaciones de movimiento del sistema ya que tenemos que derivar respecto a r y θ , quedando las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\frac{d}{dt} (\mu r^2 \dot{\theta}) = 0 \quad (5)$$

$$\mu \ddot{r} - \left(\mu r \dot{\theta}^2 - \frac{\mu(m_1+m_2)}{r^2} \right) = 0 \quad (6)$$

La ecuación (5) establece que hay una cantidad que se conserva en este caso la asociamos con el momento angular $L_z = \mu r^2 \dot{\theta}$, lo cual implica que $\dot{\theta} = L_z / \mu r^2$ y la ecuación (6) puede escribirse como:

$$\ddot{r} - \left(\frac{L_z^2}{\mu^2 r^3} - \frac{\mu^2 r(m_1+m_2)}{\mu^2 r^3} \right) = 0 \quad (7)$$



Donde entonces se tiene una ecuación diferencial ordinaria de orden 2 y con condiciones iniciales, que bien se puede resolver de manera numérica, a pesar de saber que también es una ecuación totalmente integrable.

C. RUNGE-KUTTA 4

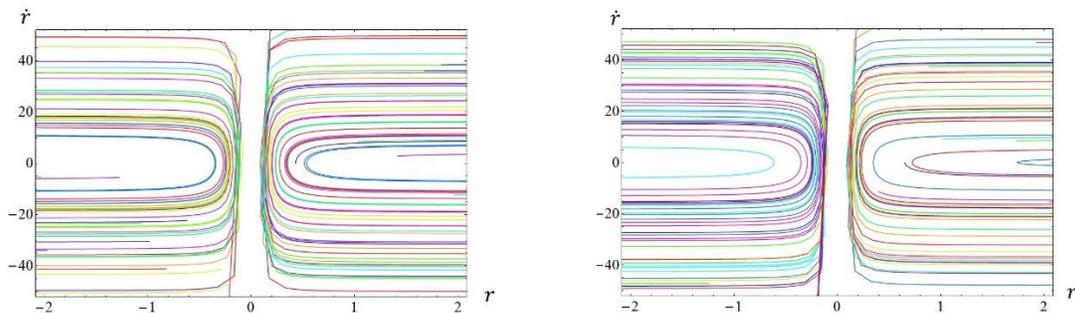
El método RK4 no es solamente un método, en realidad es una importante familia de métodos iterativos que sirven para aproximar las soluciones de EDO, de esta familia destaca el método RK4, que quizá por ser el más usado y conocido, es referido como el "Método Runge-Kutta". Definimos el método para el problema de valor inicial propuesto en la ecuación (7)

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
 k_1 &= f(x_i, t_i) \\
 k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta h, t_i + \frac{1}{2}k_1\Delta h\right) \\
 k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta h, t_i + \frac{1}{2}k_2\Delta h\right) \\
 k_4 &= f\left(x_i + \Delta h, t_i + k_3\Delta h\right)
 \end{aligned} \tag{8}$$

Para llevar a cabo la simulación de la expresión (1) será necesario realizar un cambio de variable:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= r \\
 f_2 &= \frac{df_1}{dt} = \dot{r} \\
 f_2 &= \frac{df_{12}}{dt} = \ddot{r} = \frac{L_z - \mu(m_2 + m_2)}{\mu^2 r^3}
 \end{aligned} \tag{9}$$

En la Figura 2 presentamos algunos resultados significativos de la simulación, donde se han simulado valores de $\mu = 13.25 \text{ Kg}$, $L_z = 50 \text{ Kgm}^2/\text{s}$, $r_0 = 10 \text{ m}$, $\dot{r}_0 = 10 \text{ m/s}$ para el primer caso, mientras que en el segundo caso presentado se simuló: $\mu = 13.25 \text{ Kg}$, $L_z = 50 \text{ Kgm}^2/\text{s}$, $r_0 = 10 \text{ m}$, $\dot{r}_0 = 30.5 \text{ m/s}$ y generada para distintas condiciones iniciales.



a) Simulación la partícula reducida μ , se presenta el diagrama fase del primer caso presentado, b) Segundo caso, igualmente se presenta el diagrama fase, se observa claramente el tipo de movimiento que representa una elipse o una hipérbola, en la simulación las distintas condiciones iniciales están en un intervalo de $-50 \leq r \leq 50$, mostrando la hipérbola correspondiente.

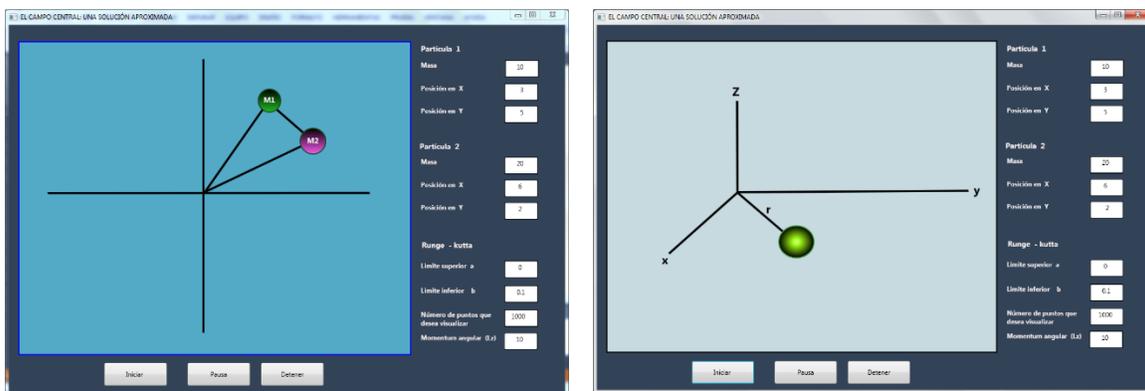


3. INTERFAZ

Uno de los objetivos de este trabajo es la visualización del movimiento de las dos partículas sujetas al CC, por lo que se ha trabajado en la implementación de un software con interfaz gráfica en la cual se visualizará la interacción de las dos partículas. Como hemos apuntado anteriormente, a pesar de saber la existencia de la solución analítica de este problema, hemos decidido resolver la ecuación diferencial ordinaria de forma numérica por medio del método de RK4, en principio porque sabemos de su eficiencia ya que proporciona resultados bastante cercanos a la solución analítica, con un error de (Δh^4) , donde Δh es el tamaño del paso. En segundo lugar porque a pesar de contar con la solución analítica se requiere visualizarla, lo que implica realizar un conjunto de iteraciones similares a las que resolvería el método, es decir, en cuestión de programación los recursos computacionales son similares para tal fin.

La idea de desarrollar la interfaz gráfica es para apreciar el movimiento que realizan por un lado un par de partículas bajo la acción de una fuerza central, por otro lado su equivalente de masa reducida alrededor del CM, así como las propiedades físicas involucradas en el movimiento, lo cual permitirá que sea mucho más fácil explicar el problema del CC, así como las interacciones que tienen cada uno de las propiedades involucradas, asimismo para que el investigador en su caso pueda desarrollar un mejor análisis y se torne más claro al visualizar el fenómeno y comprender mejor la física.

Este software se está realizando en C# con la tecnología Windows Presentation Foundation, (WPF) para la Interfaz Gráfica de Usuario (GUI) que es un lenguaje de programación para desarrollo, cabe destacar que la implementación se efectúa bajo el patrón de diseño Modelo Vista Controlador (MVC). En la figura 3 presentamos la pantalla inicial que observa el usuario una vez que se ha iniciado la aplicación.



a) Figura 3: a) pantalla inicial que observa el usuario, b) pantalla que observará el usuario con la masa reducida y la distancia de separación inicial entre las partículas.

La aplicación le solicita al usuario primeramente los datos que definen las condiciones iniciales del sistema, así como los datos necesarios que utilizará el método numérico para resolver las ecuaciones de movimiento, estos datos son: las masas de las partículas, sus coordenadas rectangulares y el momento angular de las partículas, además solicita el rango de integración que



desea así como el número de pasos que el método de RK4 deberá realizar para barrer la solución en el rango de integración, ver figura 4.

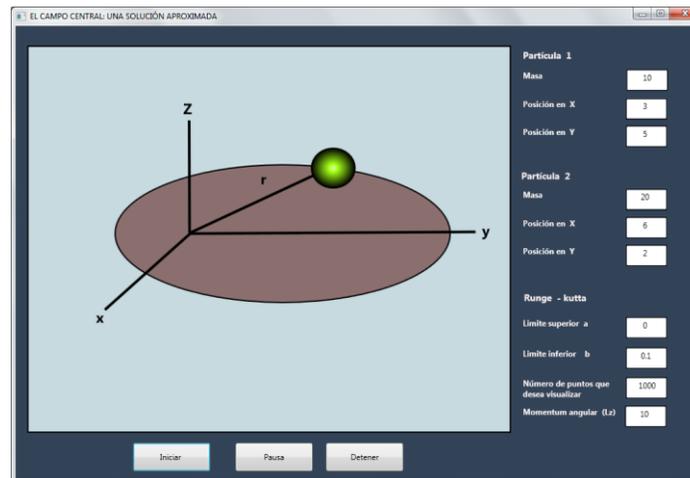


Figura 4: a) pantalla que presenta el recorrido de la partícula, una vez comenzada la simulación, también se observan los valores ejecutados por la simulación.

El método obtiene la trayectoria de las partículas, así como sus velocidades con las que se moverán en el tiempo, y un módulo de interpretación permite visualizar la solución en tiempo real, así como otras graficas que son de interés para el análisis y la comprensión del problema de campo central.

4. CONCLUSIONES

Durante este trabajo hemos discutido las ideas físicas del problema del campo central, se ha presentado las ecuaciones diferenciales que nos permiten aproximar la solución del problema de campo central, así como la implementación de una interfaz gráfica que será de ayuda en el análisis y entendimiento del problema propuesto. Asimismo hemos presentado, resultados de los avances significativos que tenemos hasta este momento de este proyecto.

BIBLIOGRAFÍA

1. Sears, Zemansky, Young, Freedman: "Física Universitaria", Vol. I, 12a Ed Pearson, 2011.
2. L. D. Landau, E. M Lifshitz "Mecánica" Vol. I, 2 Edición, Ed Reverté, 1994,
3. Luis Rodríguez Valencia, Dpto de Física, Universidad de Chile, 2000 [fecha de consulta: 27 febrero 2015]. Disponible en: <<http://solar2008.usach.cl/~lhrodrig/libromecanica.pdf>>
4. Mario Cosenza. Mecánica Clásica, Universidad de los Andes, Facultad de Ciencias, Departamento de Física, 2015 [fecha de consulta: 15 marzo 2015]. Disponible en: <<http://www.ciens.ula.ve/cff/caoticos/PDFs/guiaMecanicaClasica.pdf>>
5. Jose J. Arenas. Jacobi y la Estabilidad del Sistema Solar: Generalización a \mathbb{R}^n . Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 7, No. 2, June 2013.
6. Windows Presentation Foundation (WPF), Documentación en línea, 2015 [fecha de consulta: 20 marzo 2015]. Disponible en: <<https://msdn.microsoft.com/es-es/library/ms754130%28v=vs.110%29.aspx>>

