



EN BUSCA DE LOS MODOS NORMALES DE OSCILACIÓN.

M. G. Hernández-Morales ^a, R. Espíndola-Heredia ^a, G. Del Valle ^a,
F. Pinto ^a, J. Díaz ^a, B. Hernández ^a

^a Departamento de Ciencias Básicas, Área de Física Atómica y Molecular, Laboratorio de Investigación en Dinámica Rotacional, Edificio G-103, Universidad Autónoma Metropolitana, Azcapotzalco Av. San Pablo 180, Azcapotzalco., México D. F., gpe@correo.azc.uam.mx, roeshe@correo.azc.uam.mx, gabrieladel_valle@hotmail.com, pinto258578@gmail.com, jediaz_2194@hotmail.com, saga_bruno@hotmail.com

RESUMEN

Estudiamos el sistema formado por dos péndulos con masas m_1 y m_2 , unidos por medio de un resorte o muelle de constante elástica κ . Desarrollamos la solución teórica del sistema a través de distintas formulaciones (Newtoniana, Lagrangiana, Hamiltoniana) y presentamos resultados tanto experimentales como numéricos del sistema, enfocados en la obtención de los modos normales de oscilación de esta clase de sistemas, para entender el tratamiento dado en los distintos formalismos.

1. INTRODUCCIÓN

Un modo normal de un sistema oscilatorio es la frecuencia a la cual la estructura deformable oscilará al ser perturbada. Los modos normales son también llamados frecuencias naturales o frecuencias resonantes. Para cada estructura existe un conjunto de estas frecuencias que es único.

Normalmente se establece al sistema oscilatorio el cual está formado por una masa y un resorte el cual bien puede ilustrar el comportamiento de una estructura deformable. Sin embargo, para estudiar los modos normales es necesario tener un sistema acoplado, donde los distintos grados de libertad interaccionen, bien puede ser entonces un sistema formado por lo menos de dos masas unidas a un resorte, para el caso más simple. Entonces, cuando este tipo de sistema es excitado en una de sus frecuencias naturales, las masas se moverán con la misma frecuencia. Las fases de las masas son exactamente las mismas o exactamente las contrarias. Este trabajo se ha organizado de la siguiente manera, en la sección 2 se presenta la teoría, en las formulaciones Newtoniana Lagrangiana y Hamiltoniana, en la sección 3 presentamos los resultados experimentales así como resultados numéricos, y en la sección 4 las conclusiones correspondientes de este trabajo.

2. TEORÍA

Nuestro objeto de estudio es suponer dos partículas de masa m_1 y m_2 , colgadas de varillas iguales, inextensibles y sin peso, de longitud l , con los puntos de suspensión separados por una distancia d y unidas por medio de un resorte de constante elástica k . Dado el sistema descrito, consideramos que tanto θ_1 y θ_2 son las desviaciones de los péndulos respecto de la vertical. Luego la elongación del resorte estará dada por Δx , ver figura 1.

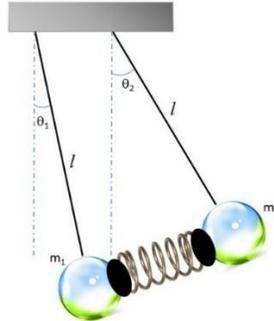


Figura 1: Sistema acoplado de dos péndulos sujetos por medio de un muelle o resorte de constante k , que oscilan y que representa el objeto de estudio experimental y teórico de este trabajo.

A. FORMULACIÓN NEWTONIANA

Tomando en cuenta la aproximación de ángulos pequeños, esto es: $\sin(\theta) \approx \theta$ y $\cos(\theta) \approx 1 - \theta^2/2$. Con lo que se considerará que el movimiento vertical de las masas es despreciable respecto a la elongación del resorte. Dentro de tal aproximación, la elongación puede expresarse como: $\Delta x \approx l(\theta_2 - \theta_1)$

La energía cinética del sistema es el resultado de la suma de las energías cinéticas de cada péndulo, la energía potencial total del sistema es el resultado de dos contribuciones; la gravitatoria de las dos masas y la del muelle, la energía mecánica total resulta que es una propiedad que se conserva dado que no existen pérdidas de energía, esto es: $E = T_1 + T_2 + U_r + U_{r1} + U_{g2} = cte.$

Entonces es derivar la expresión para la energía mecánica total E y obtener como solución una ecuación diferencial con la siguiente forma: $0 = \dot{T}_1 + \dot{T}_2 + \dot{U}_{r1} + \dot{U}_{g1} + \dot{U}_{g2}$, la cual admite una separación de variables, puesto que los ángulos son independientes, deben anularse por separado, y por tanto las ecuaciones del movimiento en la formulación Newtoniana será:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 &= -\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m_1}\right)\theta_1 + \frac{k}{m_2}\theta_2 \\ \ddot{\theta}_2 &= +\frac{k}{m_1}\theta_1 - \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m_2}\right)\theta_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Cuya solución será el determinante de la matriz si se buscan soluciones armónicas para los ángulos, con frecuencia de ω

$$\text{Det} \begin{pmatrix} \omega^2 - \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m_1}\right) & \frac{k}{m_2} \\ \frac{k}{m_1} & \omega^2 - \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m_2}\right) \end{pmatrix} = 0, \quad (2)$$

con las soluciones:

$$\omega_1 = \omega_0 \\ \omega_2 = \sqrt{\omega_{e1}^2 + \omega_{e2}^2 + \omega_0^2}, \quad (3)$$

donde

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \sqrt{\frac{g}{l}} \\ \omega_{e_i} &= \sqrt{\frac{k}{m_i}} \end{aligned}, \quad (4)$$



de esta solución se desprenden casos particulares como por ejemplo el sistema de masas iguales.

A. FORMULACIÓN LAGRANGIANA

Para el caso de la formulación Lagrangiana resulta ser similar al anterior dado que no existen fuerzas disipativas, entonces la Lagrangiana del sistema puede escribirse como $L = T - U$ y ésta puede ser incluida en la expresión de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}_i} L - \frac{\partial}{\partial \theta_i} L = 0 \quad (5)$$

para obtener las ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 g l \theta_1 - k l^2 (\theta_2 - \theta_1) &= 0 \\ m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 g l \theta_2 - k l^2 (\theta_2 - \theta_1) &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

que esencialmente son el mismo conjunto que en (1) y la su solución se encuentra presentada en el apartado anterior.

B. FORMULACIÓN HAMILTONIANA

Para el caso de la formulación Hamiltoniana tenemos:

$$H = \sum p_{\theta_i} \dot{\theta}_i - L(\theta, \dot{\theta}, t) \quad (7)$$

La ecuación para el Hamiltoniano sería la siguiente:

$$H = \frac{1}{2} \left(\frac{p_{\theta_1}^2}{l^2 m_1} + \frac{p_{\theta_2}^2}{l^2 m_2} \right) + \frac{1}{2} (m_1 g l \theta_1^2 + m_2 g l \theta_2^2) + \frac{1}{2} (k l^2 \theta_1^2 + k l^2 \theta_2^2) - \frac{1}{2} (l^2 k \theta_1 \theta_2) \quad (8)$$

donde después se aplican las derivadas parciales con respecto a θ_1 y θ_2 y se considera que $\partial H / \partial \theta_i = -\dot{p}_{\theta_i} = -m_i l^2 \ddot{\theta}_i$ con lo que se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} -m_1 l^2 \ddot{\theta}_1 &= m_1 g l \theta_1 + k l^2 (\theta_2 - \theta_1) \\ -m_2 l^2 \ddot{\theta}_2 &= m_2 g l \theta_2 + k l^2 (\theta_2 - \theta_1) \end{aligned} \quad (9)$$

que son el mismo conjunto de ecuaciones que se obtienen en (1) y (6) y cuya solución está expuesta en (4)

Estas soluciones representan el movimiento que tienen los péndulos acoplados, puede verificarse que si dicha solución se inserta en las ecuaciones de movimiento, debemos de recordar que estamos en la aproximación de ángulos pequeños, se obtienen dos resultados interesantes, para el caso de ω_1 , la solución implica que:

$$\theta_1 = \theta_2 \quad (10)$$

Lo que quiere decir que se encuentran en fase, las dos oscilaciones, esto implica que el sistema estará moviéndose como un péndulo físico, y la presencia del resorte, equivaldrá a una barra inextensible. En la figura 2 el segundo caso mostrado, representa esta solución. Sin embargo trabajar con la solución para ω_2 , proporcionará el siguiente resultado:



$$\theta_1 = -\theta_2 \quad (11)$$

Lo cual implica que las soluciones están en contra fase, En la figura 2 el caso mostrado en primer lugar representa esta solución obtenida.

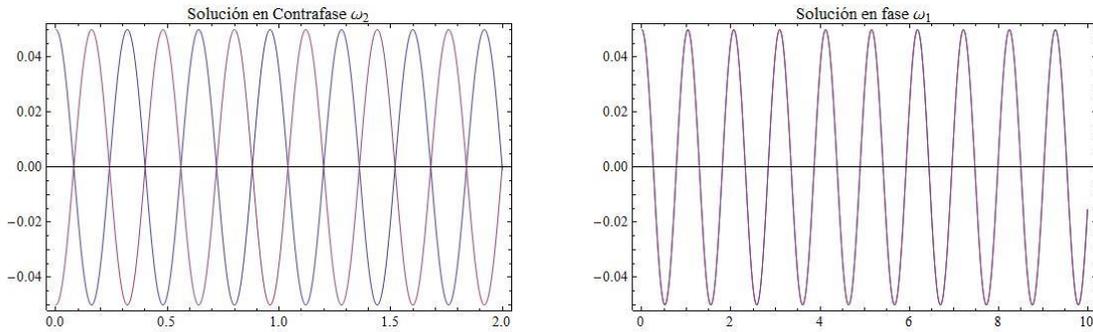


Figura 2. Resultados numéricos de las oscilaciones, primer caso se presenta el resultado de ω_2 que proporciona una solución en contrafase, y el segundo caso es la solución ω_1 que presenta una solución en fase.

Una tercera posible solución se presenta cuando una de las masas oscila con la frecuencia ω_1 y la otra oscila con la frecuencia ω_2 , la figura 3 muestra esta posibilidad.

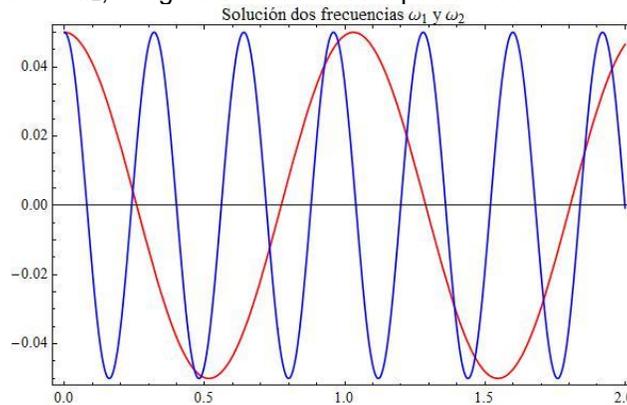


Figura 3. Resultados numéricos de las oscilaciones, cuando una de las masa oscila con la frecuencia ω_1 , mientras la otra oscila con la frecuencia ω_2 .

3. PARTE EXPERIMENTAL

Se elaboraron tres diferentes arreglos que constan del cambio de ciertos parámetros como las constantes del resorte, masas y longitudes.

A. Masas Diferentes



El primer arreglo consta de dos péndulos unidos por un resorte de constante elástica k , masas m_1 y m_2 , dos sensores de rotación de la marca PASCO modelo PS-20120, el sistema montado se observa en la figura 4. Los valores iniciales aparecen en tabla 1.



Figura 4. Montaje Experimental

(Masa ± 0.001) Kg	(Masa ± 0.001) Kg*	(Longitud ± 0.01) m	(Constante k) N/m
0.06985	0.06985	0.263	19
0.2478	0.06940	0.263	19

Tabla 1. Parámetros constantes del experimento, *la segunda columna fue considerada para el caso de masas iguales.

Con ayuda de los sensores de rotación se desplazaron las varillas de su posición de equilibrio, es decir respecto de la vertical y debido a que una de los cuerpos es más denso que el otro, se garantizó que el resorte se encontrará estirado para buscar con la oscilación el resultados adecuado de los modos normales. En la figura 5 donde podemos apreciar los diferentes radios en un intervalo de 10 segundos de tiempo.

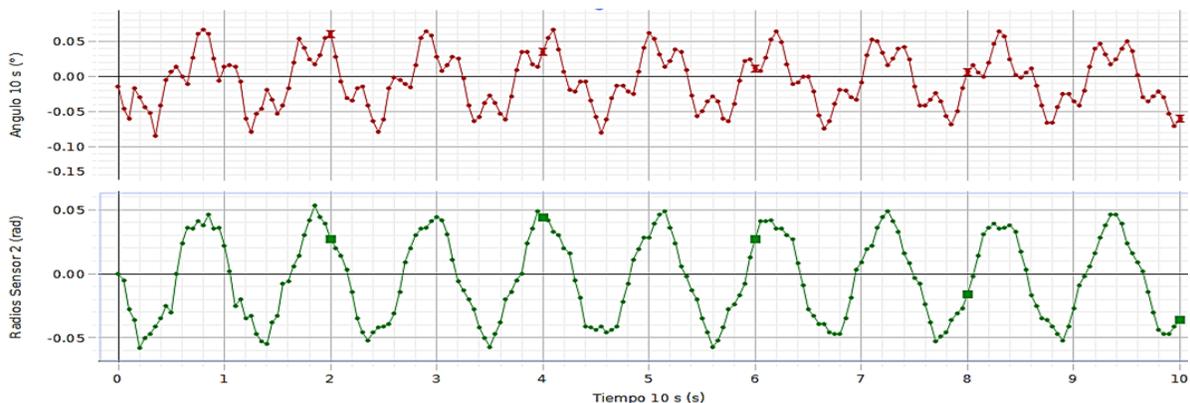


Figura 5. Resultados experimentales para las dos frecuencias con el arreglo de masas diferentes.

Posteriormente aplicamos un ajuste a este fragmento de grafica que nos permite obtener como resultados las frecuencias $\omega_1 = (6.03 \pm 0.012)$ y $\omega_2 = (6.06 \pm 0.010)$



B. Masas Iguales

En este caso el arreglo pertenece al de dos péndulos unidos por un resorte de constante elástica k con masas iguales conectadas de la misma manera descrita anteriormente a los sensores, teniendo las condiciones iniciales propuestas en la tabla 1

Procediendo de la misma manera que en el apartado anterior y después de realizar el ajuste mostramos en la figura 6 las dos oscilaciones de los sensores con respecto al ángulo y del tiempo donde se obtuvieron en un minuto 1311 datos, de los cuales para realizar el análisis y determinar la frecuencia, solamente se consideraron 10 seg, debido a que las condiciones del experimento mostraron el alcance de las fuerzas disipativas y en las soluciones que hemos presentado en la parte teórica solo hemos considerado las soluciones ideales, por ello con la intención de reducir . Con ayuda de un ajuste sinoidal en este fragmento de grafica nos permite obtener una $\omega_1 = (6.03 \pm 0.012)$ y $\omega_2 = (6.06 \pm 0.010)$.

En el momento final de la experimentación el sistema presento un amortiguamiento y una frecuencia el cual llamaremos frecuencia experimental de $\omega_{exp} = (5.87 \pm 0.039)$.

Con respecto a la teoría podemos decir que esta frecuencia experimental y la frecuencia teórica $\omega_{exp} = (5.87 \pm 0.039)$ y $\omega_{teorica} = (6.09 \pm 0.001)$ podemos indicar que la frecuencia de amortiguamiento experimental la variación está dentro de los términos de la teoría.

En el caso del segundo modo de vibración $\omega_{T,2} = 23.48$, para determinar este modo es necesario las dos frecuencias ω_1 y ω_2 las cuales se determinara un promedio que se llamara ω_p y conociendo que $\omega_E = \sqrt{[(\omega_{T,E})^2 - (\omega_p)^2]}/2 = 16.04$ este resultante $\omega_E = 16.51$ el cual si se compara con el valor de la $\omega_{TE} = \sqrt{k/m} = 16.51$ donde el error experimental es del 2.82%.

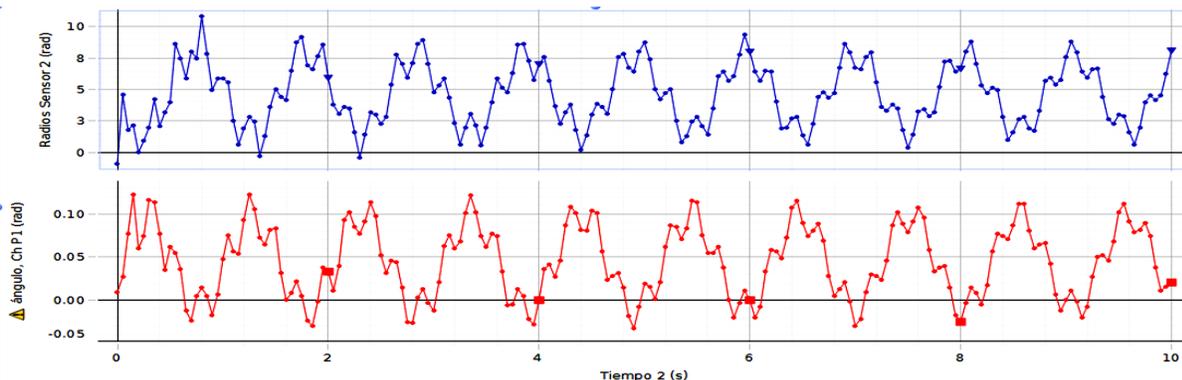


Figura 6. Resultados experimentales para las dos frecuencias.



3. CONCLUSIONES

En este trabajo presentamos los distintos enfoques para obtener los modos normales de oscilación del sistema dos péndulos más resorte con dos masas m_1 y m_2 , mostramos que en las tres formulaciones siempre es posible obtener el mismo sistema de ecuaciones de movimiento cuya solución es esencialmente la misma.

A pesar de que el estudio teórico parece ser significativamente sencillo, un estudio experimental de dos péndulos acoplados muestra que la dinámica del sistema puede ser notablemente compleja para un sistema aparentemente tan simple.

Sin embargo, es posible buscar soluciones armónicas los llamados modos normales en los que el sistema oscila como un todo de frecuencias bien determinadas.

4. BIBLIOGRAFÍA

1. Singiresu S. Rao, "Vibraciones Mecánicas", 2012, 5a Edición., Pearson Education México.
2. Quintero Salazar, Edwin Andrés; Chaves Osorio, José Andrés, Simulación con Circuitos Electrónicos de la Práctica de Laboratorio de Física III: Péndulos Acoplados, Scientia et Technica, vol. XVI, Núm. 44, 2010, pp. 201-206, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia
3. Romualdo S. Silva Jr., Formalismo Hamiltoniano: Modos normais de vibração de dois pêndulos com massas diferentes acoplados por uma mola, 2013, Lat. Am. J. Phys. Educ. Vol. 7, No. 1.
4. A. P. French, Vibraciones y Ondas, 2000, Editorial Reverté, pp139-150