UNA APROXIMACIÓN DE ELEMENTO FINITO PARA LA ECUACIÓN GENERALIZADA DE BURGERS-HUXLEY QUE CONSERVA LA POSITIVIDAD Y LA ACOTACIÓN

J. E. Macías-Díaz[a], I. E. Medina-Ramírez[a],

[a]Departamento de Matemáticas y Física, Universidad Autónoma de Aguascalientes, jemacias@correo.uaa.mx
[a]Departamento de Química, Universidad Autónoma de Aguascalientes, iemedina@correo.uaa.mx

RESUMEN:
En este trabajo, se propone un método numérico para aproximar las soluciones de formas generalizadas de dos modelos bidimensionales famosos de la física matemática, a saber, la ecuación de Burgers-Fisher y la ecuación de Burgers-Huxley. Los modelos difusivos investigados en este trabajo consideran la inclusión de advección-convección y reacción alineales; en particular, las leyes de reacción consideradas son generalizaciones o extensiones del término correspondiente en la ecuación clásica de Fisher de dinámica de la población. En el escenario de una sola dimensión, la literatura especializada en el área da cuenta de la existencia de soluciones analíticas para ambos modelos, en forma de frentes de onda viajeras acotadas dentro de un intervalo de I de los números reales. Motivados por este hecho, se propone una metodología de elemento finito que garantiza que, bajo determinadas condiciones analíticas sobre los parámetros del modelo, estimaciones acotadas en I evolucionará discretamente para convertirse en nuevas estimaciones que igualmente estarán acotadas dentro de I. La preservación de las propiedades de la positividad y la acotación de las soluciones aproximadas se lleva a cabo utilizando la teoría de M-matrices, que son un tipo especial de matrices no singulares, reales, de forma cuadrada. Además, se establece la preservación en el dominio discreto de la antisimetría de las soluciones de los modelos estudiados. Nuestra implementación computacional del método confirma numéricamente que las propiedades de la positividad y la acotación se conservan bajo las condiciones analíticas derivadas teóricamente. La técnica es un método de dos pasos, y es consistente de primer orden en el tiempo y segundo orden en el espacio. En la práctica, nuestras simulaciones muestran una buena concordancia entre las soluciones analíticas obtenidas en el presente trabajo y las aproximaciones numéricas correspondientes.

1. INTRODUCCIÓN
El problema consiste en aproximar aquellas soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales parciales que nunca toman valores negativos. El problema tiene su origen físico, químico y biológico en el hecho de que, para ciertas variables, no es significativo hablar de soluciones que no sean no negativas.

Actualmente, ya existe una teoría extensa sobre la existencia de soluciones no negativas para varias ecuaciones diferenciales. El problema es que, dada la complejidad de las soluciones, es prácticamente imposible determinarlas de manera analítica. Es por ello que existe una fuerte necesidad de diseñar herramientas computacionales que aproximen consistentemente las soluciones no negativas de dichas ecuaciones diferenciales. Al respecto, ya se cuentan con algunas técnicas tales para aproximar soluciones no negativas de ecuaciones tales como la ecuación de onda, así como algunas otras ecuaciones relativamente simples. Sin embargo, aún no se cuenta con herramientas para aproximar las soluciones de ecuaciones más complejas, tales como las versiones generalizadas de la ecuación de Burgers-Huxley y la ecuación de Stefan-Boltzmann.

2. JUSTIFICACIÓN

El desarrollo de métodos computacionales que preserven la positividad de soluciones se encuentra justificado en virtud de que existen problemas físicos, biológicos y químicos en los que las soluciones que toman valores negativos no tienen ningún significado. Así, por ejemplo, en aquellas situaciones físicas en las que la variable a medir sea temperatura medida en una escala absoluta, o bien, problemas biológicos en los que se cuantifique la densidad de una población de bacterias, o bien, problemas químicos en los que la variable de interés sea la concentración de una substancia en una solución, desde un punto de vista realista, no cabe la posibilidad de que la ecuaciones de evolución del problema arrojen mediciones negativas.

Para la mayoría de los problemas que hemos mencionado, se sabe de la exustencia de soluciones analíticas que satisfacen la propiedad de positividad, aún cuando no se conocen muchas soluciones analíticas a dichos problemas. Es por esto que el diseño de métodos numéricos que preserven la positividad de soluciones a estos problemas, y que aproximen de manera consistente y estable dichas soluciones, es una prioridad computacional y matemática.

3. OBJETIVOS

Al término de este trabajo, se alcanzaron los siguientes objetivos:

- Desarrollar técnicas computacionales para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales parciales poblacionales, tales como la ecuación clásica de Burgers-Huxley con términos no lineales que generalicen a la ley logística, que garanticen la positividad de las aproximaciones a las soluciones.
- Desarrollar técnicas computacionales para la ecuaciones hiperbólicas generalizadas de Burgers-Huxley, que preserven la positividad de las aproximaciones y, cuando sea requerido, la acotación de las mismas dentro de un intervalo contenido en el conjunto de los reales no negativos.
- Si es posible, desarrollar técnicas similares para ecuaciones hiperbólicas que generalicen ecuaciones de la termodinámica, en la que la variable respuesta sea medida en una escala absoluta (tal como la ecuación de Stefan-Boltzmann).

4. MATERIALES Y MÉTODOS

Para alcanzar dichos objetivos, se realizaron las siguientes actividades, para cada una de las ecuaciones a estudiar:

1. Desarrollar esquemas de diferencias finitas que aproximen a las ecuaciones en cuestión.
2. Demostrar propiedades numéricas de dichos esquemas, tales como consistencia y estabilidad.
3. Verificar la eficiencia de los métodos propuestos, al compararlos directamente con soluciones conocidas de las ecuaciones bajo estudio, o bien, si tal no es posible, contra soluciones conocidas de ecuaciones aproximadas.
4. Cuando sea posible, desarrollar esquemas que aproximen consistentemente cantidades físicas significativas, tales como la energía total del sistema, y verificar si las aproximaciones son consistentes en el dominio de la razón de cambio de energía con respecto al tiempo.
5. En caso de que se realice el objetivo inmediato anterior, constatar la congruencia entre los resultados en los dominios de la solución y la energía.

5. RESULTADOS

Se desarrollaron técnicas computacionales que aproximen consistentemente las soluciones positivas de ecuaciones diferenciales parciales en las que la restricción de positividad conlleve una significancia física. Particularmente, se estudiaron versiones generalizadas de la ecuación clásica de Burgers-Huxley y de algunas otras ecuaciones en las que las variabled de interés sean medidas en escalas absolutas (temperatura, densidad de población, densidad en solución, etc.). Este estudio arrojó métodos consistentes y estables para aproximar confiablemente dichas soluciones.

6. CONCLUSIONES

En este trabajo, se propuso un método numérico para aproximar las soluciones de formas generalizadas de dos modelos bidimensionales famosos de la física matemática, a saber, la ecuación de Burgers-Fisher y la ecuación de Burgers-Huxley. Los modelos difusivos investigados en este trabajo consideran la inclusión de advección-convección y reacción alineales; en particular, las leyes de reacción consideradas son generalizaciones o extensiones del término correspondiente en la ecuación clásica de Fisher de dinámica de la población. En el escenario de una sola dimensión, la literatura especializada en el área da cuenta de la existencia de soluciones analíticas para ambos modelos, en forma de frentes de onda viajeras acotadas dentro de un intervalo de I de los números reales. Motivados por este hecho, se propone una metodología de elemento finito que garantiza que, bajo determinadas condiciones analíticas sobre los parámetros del modelo, estimaciones acotadas en I evolucionará discretamente para convertirse en nuevas estimaciones que igualmente estarán acotadas dentro de I. La preservación de las propiedades de la positividad y la acotación de las soluciones aproximadas se lleva a cabo utilizando la teoría de M-matrices, que son un tipo especial de matrices no singulares, reales, de forma cuadrada. Además, se establece la preservación en el dominio discreto de la antisimetría de las soluciones de los modelos estudiados. Nuestra implementación computacional del método confirma numéricamente que las propiedades de la positividad y la acotación se conservan bajo las condiciones analíticas derivadas teóricamente. La técnica es un método de dos pasos, y es consistente de primer orden en el tiempo y segundo orden en el espacio. En la práctica, nuestras simulaciones muestran una buena concordancia entre las soluciones analíticas obtenidas en el presente trabajo y las aproximaciones numéricas correspondientes.

BIBLIOGRAFÍA

1. K. P. Hadeler; K. Dietz, Nonlinear hyperbolic partial differential equations for the dynamics of parasite populations, Comp.Math. Appl. 9, 415–430 (1983).