VARIEDADES ÁNGULO-MOMENTO Y VARIEDADES DE CONTACTO EN DIMENSIONES ALTAS

Yadira Lizeth Barreto Felipe

Universidad del Mar, Bahías de Huatulco, Oax., yadira@huatulco.umar.mx

RESUMEN:
Las variedades ángulo-momento mixtas son una generalización de las variedades ángulo- momento que han sido estudiadas por S. López de Medrano, A. Verjovsky, V. Buchstaber, T. Panov, L. Meersseman, F. Bosio y S. Gitler. Dichas variedades son compactas y de dimensión impar mayor a tres. Aquí se demuestra que las variedades ángulo-momento mixtas son nuevos ejemplos de variedades de contacto (para un estudio mas detallado del tema se puede consultar [3]).

1. INTRODUCCIÓN

La topología de la intersección de cuádricas en $\mathbb{C}^n$ de la forma:

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\lambda}_j |z_j|^2 = 0, \quad \rho(Z) := \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 = 1,$$

con $Z = (z_1, \ldots, z_n)$, $\boldsymbol{\lambda}_j = \left(\lambda_j^1, \ldots, \lambda_j^m\right) \in \mathbb{C}^m$, $m \geqslant 1$, $n > 2m$ y la n-tupla $\boldsymbol{\Lambda} = \left(\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_n\right)$ satisfaciendo una *condición de admisibilidad*, ha sido estudiada desde hace mas de 30 años por varios matemáticos, entre los que destacan S. López de Medrano, A. Verjovsky, V. Buchstaber, T. Panov, L. Meersseman, F. Bosio y S. Gitler (ver por ejemplo [4–6, 9, 12, 13]). Dichas intersecciones son variedades de dimensión real $2n-2m-1$, se denotan por $\mathcal{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},m,n)}$ y se conocen como *variedades ángulo-momento* o *variedades ángulo-momento clásicas*.

Las *variedades ángulo-momento mixtas* son una generalización de las variedades ángulo-momento obtenidas por la intersección de las siguientes cuádricas no coaxiales, dichas intersecciones también son variedades y se denotan por $\mathbf{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},1,n+s)}$ y $\mathbf{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},m,n)}$, respectivamente (ver [3, 7]):

- Para $m = 1$ y $s \geq 1$:

$$\sum_{r=1}^{s} w_r^2 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |z_j|^2 = 0, \qquad \sum_{r=1}^{s} |w_r|^2 + \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 = 1,$$

  donde $\lambda_j \in \mathbb{C}$ para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$.

- Para $m > 1$:

$$\boldsymbol{w}^2 + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\lambda}_j |z_j|^2 = 0, \qquad \sum_{k=1}^{m} |w_k|^2 + \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 = 1,$$

  donde $\boldsymbol{w}^2 = \left(w_1^2, \ldots, w_m^2\right) \in \mathbb{C}^m$ con $w_k \in \mathbb{C}$, $k \in \{1, \ldots, m\}$ y $\boldsymbol{\lambda}_j = \left(\lambda_j^1, \ldots, \lambda_j^m\right) \in \mathbb{C}^m$ para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Por otro lado, uno de los problemas fundamentales de la topología de contacto es saber cuales variedades admiten una estructura de contacto sobre ellas. En dimensión tres toda variedad admite una estructura de contacto (ver [10, 11]).

S. J. Altschuler en [1] introdujo, para dimensión tres, el concepto de *confoliaciones conductivas*; esto es, confoliaciones que tienen la propiedad de propagar "contacto" a todos los puntos de una variedad por medio de caminos con ciertas características. Estas ideas fueron generalizadas para dimensiones mayores a tres por S. J. Altschuler en conjunto con L. F. Wu en [2].

Se utilizará este método para construir una estructura de contacto sobre las variedades ángulo-momento mixtas, cabe mencionar que dicha construcción es en cierto sentido explícita. Concluyendo de este modo, que las variedades ángulo-momento mixtas son nuevos ejemplos de variedades de contacto en dimensión mayor a tres.

Notación: Se denotará por $\mathcal{K}_\alpha, \mathcal{K}_{d\alpha}, \mathcal{K}_\beta, \mathcal{K}_{d\beta}$ al núcleo de $\alpha, d\alpha, \beta, d\beta$, respectivamente.

Observación 1. Se fijará una métrica riemanniana g sobre las variedades ángulo-momento mixtas y denotaremos por $*$ al operador de Hodge para la métrica riemanniana g. Las proposiciones 2 y 4, así como los lemas 1, 2 y 3 de la siguiente sección, son independientes de la elección de la métrica riemanniana.

Las demostraciones así como un estudio más detallado de los resultados que a continuación se presentan pueden consultarse en [3].

TEORÍA

Consideremos la 1-forma real $\alpha = i\left(\sum_{r=1}^{s}\left(w_r d\bar{w}_r - \bar{w}_r dw_r\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j\right)\right)$ la cual, restringida al espacio tangente $\mathbf{T}_X\left(\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)}\right)$ con $X \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)}$ es no trivial.

Proposición 1. *Sean $m = 1$, $n > 3$ y $s \geq 1$. Entonces*

1. *Si $X \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)}$ es tal que $w_1^2 + \cdots + w_s^2 \neq 0$, el núcleo de $d\alpha$ en X es un subespacio de $\mathbf{T}\left(\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)}\right)$ de dimensión real uno.*
2. *Si $X \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)}$ es tal que $w_1^2 + \cdots + w_s^2 = 0$, el núcleo de $d\alpha$ en X es un subespacio de $\mathbf{T}\left(\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)}\right)$ de dimensión real tres.*

Los vectores en $\mathcal{K}_{d\alpha}(X)|_{\mathbf{T}\left(\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)}\right)}$ son de la forma

$$v\,(T, \mu; X) = -i\Big(2\overline{T}\bar{w}_1 + \mu w_1, \ldots, 2\overline{T}\bar{w}_s + \mu w_s, \big(2\Re\,(T\lambda_1) + \mu\big)z_1, \ldots, \big(2\Re\,(T\lambda_n) + \mu\big)z_n\Big)$$

donde $T \in \mathbb{C}$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

Sea W_s el conjunto de puntos $X = \big(w_1, \ldots, w_s, z_1, \ldots, z_n\big) \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)}$ tales que $w_1^2 + \cdots + w_s^2 = 0$. Entonces, W_s es una subvariedad analítica real de $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)}$ de codimensión real $2s$. Dicha variedad es singular si $s > 1$ y cuando $s = 1$ es una variedad ángulo-momento de dimensión $2n - 3$.

En el conjunto de puntos $X = \left(w_1, \ldots, w_s, z_1, \ldots, z_n\right) \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)}$ tales que $w_1^2 + \cdots + w_s^2 \neq 0$, la dimensión de $\mathcal{K}_\alpha(X) \cap \mathcal{K}_{d\alpha}(X)$ es cero. Se sigue que la 1-forma α es una forma de contacto en $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)} - W_s$.

En el conjunto de puntos $X = \left(w_1, \ldots, w_s, z_1, \ldots, z_n\right) \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)}$ donde $w_1^2 + \cdots + w_s^2 = 0$ y asumiendo $\mu = 0$, tenemos que $\mathcal{K}_\alpha(X) \cap \mathcal{K}_{d\alpha}(X)$ es un subespacio de dimensión real dos parametrizado por $T \in \mathbb{C}$.

Proposición 2. *Considerando una orientación apropiada de* $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)}$*,* α *es una confoliación positiva:*

1. $*\left(\alpha \wedge d(\alpha)^{n+s-2}\right) > 0$ *para* $X \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)}$ *tal que* $w_1^2 + \cdots + w_s^2 \neq 0$.
2. $*\left(\alpha \wedge d(\alpha)^{n+s-2}\right) = 0$ *para* $X \in W_s$.
3. *El conjunto de puntos* $X \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)}$ *tales que* $*\left(\alpha \wedge d(\alpha)^{n+s-2}\right) = 0$ *es un conjunto analítico real de codimensión real dos en* $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)}$ *dado por* $W = \left\{X \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)} \;\middle|\; w_1^2 + \cdots + w_s^2 = 0\right\}$.

Lema 1. *Sea* $X \in W_1$*. Entonces*

1. *Existe una curva suave parametrizada* $\gamma : [-1,1] \to \mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+1)}$ *tal que* $|\gamma'(x)| \neq 0$ *para toda* $x \in [-1,1]$.
2. $\gamma(0) = x$ *y* $\gamma'(0) \in \left[\ker(\tau)\right]^{\perp}(x)$.
3. *Si* $x \in [-1,1]$ *con* $x \neq 0$ *y* $\gamma(x) \notin W_1$, $\gamma'(x) \in \left[\ker(\tau)\right]^{\perp}(\gamma(x)) = \mathcal{K}_\alpha\left(\gamma(x)\right))$.

Lema 2. *Sean* $m = 1, n > 3, s > 1$ *y* $\mathbf{\Lambda}$ *una configuración admisible. Sea*

$$W = \left\{X \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)} \;\middle|\; \left(\alpha \wedge d(\alpha)^{n+s-2}\right)(X) = 0\right\},$$

el conjunto analítico real de codimensión real dos, donde α *es una confoliación positiva sobre* $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)}$*. Entonces* α *es una confoliación conductiva.*

El conjunto abierto $V_W = \mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)} - W$ es conexo pues W es de codimensión real dos. Este conjunto es el conjunto donde la forma α es de contacto. De la proposición 2 y lemas 1 y 2 se sigue que la 1-forma α define una confoliación conductiva sobre $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)}$ en el sentido de J. S. Altschuler y L. F. Wu [2].

Consideremos ahora la 1-forma real $\beta = i\left(\sum_{r=1}^{m}\left(w_r d\bar{w}_r - \bar{w}_r dw_r\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j\right)\right)$ la cual, restringida al espacio tangente $\mathbf{T}_X\left(\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},m,n)}\right)$ con $X \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},m,n)}$ es no trivial.

Proposición 3. *Sean* $m > 1$ *y* $n > 2m$*. Entonces*

1. *Si* $X = \left(w_1, \ldots, w_m, z_1, \ldots, z_n\right) \in \mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},m,n)}$ *es tal que* $w_r \neq 0$ *para toda* $r = 1, \ldots, m$*, el núcleo de* $d\beta$ *en el punto* X *es un subespacio de* $\mathbf{T}\left(\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},m,n)}\right)$ *de dimensión real uno.*

2. *Si* $X \in \mathbf{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},m,n)}$ *es tal que* ℓ *coordenadas* w_r *son iguales a* 0 *para* $\ell, r \in \{1,\dots,m\}$*, el núcleo de* $d\beta$ *en el punto* X *es un subespacio de* $\mathbf{T}\left(\mathbf{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},m,n)}\right)$ *de dimensión real* $2\ell+1$ *.*

Los vectores $v \in \mathcal{K}_{d\beta}(X)|_{\mathbf{T}\left(\mathbf{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},m,n)}\right)}$ son de la forma:

$$-i\Big(2\bar{w}_1\overline{T}_1+\mu w_1,\dots,2\bar{w}_m\overline{T}_m+\mu w_m,\ \left(2\Re\left(\sum_{k=1}^{m}T_k\lambda_1^k\right)+\mu\right)z_1,\dots,\left(2\Re\left(\sum_{k=1}^{m}T_k\lambda_n^k\right)+\mu\right)z_n\Big),$$

donde $T_k \in \mathbb{C}$ para toda $k \in \{1,\dots,m\}$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

Sea W_ℓ el conjunto de puntos $X = \big(w_1,\dots,w_m,z_1,\dots,z_n\big) \in \mathbf{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},m,n)}$ tal que ℓ coordenadas w_k son iguales a cero para $\ell, k \in \{1,\dots,m\}$. W_ℓ es una subvariedad analítica real de $\mathbf{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},m,n)}$ de codimensión real 2ℓ.

En el conjunto de puntos $X \in \mathbf{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},m,n)}$ donde todas las coordenadas w_k son distintas de cero, la forma β es una forma de contacto. Si $\mu = 0$ y ℓ coordenadas w_k son iguales a cero con $\ell, k \in \{1,\dots,m\}$, tenemos que $\mathcal{K}_\beta(X) \cap \mathcal{K}_{d\beta}(X)$ es un subespacio de dimensión real 2ℓ parametrizado por ℓ números complejos.

Proposición 4. *Para la orientación apropiada de* $\mathbf{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},m,n)}$*,* β *es una confoliación positiva:*

1. $*\Big(\beta\wedge(d\beta)^{n-1}\Big)(X) > 0$ *para* $X = \big(w_1,\dots,w_m,z_1,\dots,z_n\big) \in \mathbf{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},m,n)}$ *con* $w_k \neq 0$ *para toda* $k \in \{1,\dots,m\}$*.*
2. $*\Big(\beta\wedge(d\beta)^{n-1}\Big)(X) = 0$ *siempre que* $X \in W_\ell$ *con* $\ell \in \{1,\dots,m\}$*.*
3. *El conjunto de puntos* $X \in \mathbf{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},m,n)}$ *tal que* $*\Big(\beta\wedge(d\beta)^{n-1}\Big)(X) = 0$*, es un conjunto analítico real de codimensión real dos en* $\mathbf{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},m,n)}$ *dado por* $\Sigma = \Big\{X \in \mathbf{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},m,n)} \ \Big|\ w_1\dots w_m = 0\Big\}$*.*

Lema 3. *Sean* $m > 1, n > 2m$ *y* $\boldsymbol{\Lambda}$ *una configuración admisible. Sea*

$$\Sigma = \Big\{X \in \mathbf{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},m,n)} \ \Big|\ *\Big(\beta\wedge(d\beta)^{n-1}\Big)(X) = 0\Big\},$$

el conjunto analítico real de codimensión real dos, donde β *es una confoliación positiva sobre* $\mathbf{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},m,n)}$*. Entonces* β *es una confoliación conductiva.*

El conjunto abierto $V_\Sigma = \mathbf{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},m,n)} - \Sigma$ es conexo pues Σ es de codimensión real dos. Este conjunto es el conjunto donde la forma β es de contacto. La proposición 4 y el lema 3 implican que la 1-forma β define una confoliación conductiva sobre $\mathbf{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},m,n)}$ en el sentido de J. S. Altschuler y L. F. Wu.

RESULTADOS

Ya se mostró que las 1-formas α y β definen confoliaciones conductivas sobre las variedades ángulo-momento mixtas $\mathbf{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},1,n+s)}$ y $\mathbf{M}_1^{(\boldsymbol{\Lambda},m,n)}$, respectivamente. Este hecho nos permite enunciar los siguientes resultados (para más detalle se puede consultar [3]):

Teorema 1. *Sean $m = 1$, $n > 3$, $s > 1$ y $\mathbf{\Lambda} = \big(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\big)$ una configuración admisible, con $\lambda_j \in \mathbb{C}$. Las variedades $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},1,n+s)}$ admiten estructuras de contacto.*

Teorema 2. *Sean $m > 1$, $n > 3$ tal que $n > 2m$ y $\mathbf{\Lambda} = \big(\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_m\big)$ una configuración admisible en $\mathbb{C}^m$. Las variedades ángulo-momento mixtas $\mathbf{M}_1^{(\mathbf{\Lambda},m,n)}$ asociadas a $\mathbf{\Lambda}$, son variedades de contacto.*

CONCLUSIONES

Las variedades ángulo-momento mixtas son nuevos ejemplos de variedades de contacto en dimensión mayor a tres con una topología muy rica.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Altschuler, S. J, "A geometric heat flow for one-forms on three dimensional manifolds", *Illinois Journal of Mathematics*, Vol. 39, no. 1, pp. 98-118, 1995.

[2] Altschuler, S. J. and Wu, L. F., "On deforming confoliations", *J. Differential Geometry*, Vol. 54, pp. 75-97, 2000.

[3] Barreto, Y. and Verjovsky, A., "Moment-angle manifolds, intersection of quadrics and higher dimensional contact manifolds", *Moscow Mathematical Journal.*, Vol. 14, No. 4, pp. 669-696, 2014.

[4] Bosio, F and Meersseman, L., "Real quadrics in $\mathbb{C}^n$, complex manifolds and convex polytopes", *Acta Math.*, Vol. 197, pp. 53-127, 2006.

[5] Buchstaber,V. M. and Panov, T. E. "Torus actions and their applications in Topology and Combinatorics", *University Lecture Seriers, AMS*, 2002.

[6] Gitler, S. and López de Medrano, S., "Intersections of quadrics, moment-angle manifolds and connected sums", *Geom. Topol.*, Vol. 17, No. 3, pp. 1497-1534, 2013.

[7] Gómez, V. and López de Medrano, S., "Topology of the intersections of quadrics II", *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana* Vol. 20, pp. 237-235.

[8] López de Medrano, S., "The topology of the intersection of quadrics in $\mathbb{R}^n$", *Springer-Verlag. Lectures Notes in Mathematics*, Vol. 1370, pp. 280-292, 1989.

[9] López de Medrano, S. and Verjovsky, A., "A new family of complex, compact, non-symplectic manifolds", *Bol. Soc. Bras. Mat.* , Vol. 28, No. 2, pp. 253-269, 1997.

[10] Lutz, R., "Sur la géométrie des structures de contact invariantes", *Annales de L'Institut Fourier*, Vol. 29, No. 1, pp. 283-306, 1979.

[11] Martinet, J., "Formes de contact sur les variétés de dimension 3", *Proceedings of Liverpool Singularities Symposium 2*, Vol. 209, pp. 142-163, 1971.

[12] Meersseman, L., "Construction de variétés compactes complexes", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* , Vol. 325, No. 9 pp. 1005-1008, 1997.

[13] Meersseman, L. and Verjovsky, A., "Holomorphic principal bundles over projective toric varieties", *J. Reine Angew, Math*, Vol. 572, pp. 57-96, 2004.